INFORMATOR
o **egzaminie maturalnym** z **matematyki**

jako przedmiotu obowiązkowego (poziom podstawowy)

od roku szkolnego 2022/2023

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2021

Zespół redakcyjny:

Mariusz Mroczek (CKE)
Hubert Rauch (CKE)
Marian Pacholak (OKE Warszawa)
dr Wioletta Kozak (CKE)
dr Marcin Smolik (CKE)
dr Roman Wosiek
Piotr Ludwikowski (OKE Kraków)
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)
Joanna Berner (OKE Warszawa)

Recenzenci:

prof. dr hab. Zbigniew Marciniak (UW)
dr hab. Maciej Borodzik (UW)
Ewa Dolaczyńska (recenzja nauczycielska)
Agata Górniak (recenzja nauczycielska)
dr Tomasz Karpowicz (recenzja językowa)

Informator został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 99
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

Spis treści

1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym

WSTĘP

Matematyka jest jednym z obowiązkowych przedmiotów na egzaminie maturalnym. Wszyscy zdający przystępują do egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym. Każdy maturzysta może również przystąpić do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym jako przedmiotu dodatkowego.

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym sprawdza, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej[1].

Podstawa programowa dzieli wymagania na ogólne i szczegółowe. Wymagania ogólne mają podstawowe znaczenie, gdyż syntetycznie ujmują nadrzędne cele kształcenia w nauczaniu matematyki. Wymagania szczegółowe odwołują się do ściśle określonych wiadomości i konkretnych umiejętności.

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2022/2023 jest podzielony na dwie części, zamieszczone jako osobne pliki.

CZĘŚĆ PIERWSZA zawiera:
- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na **poziomie podstawowym**
- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie podstawowym.

CZĘŚĆ DRUGA zawiera:
- szczegółowy opis egzaminu maturalnego z matematyki na **poziomie rozszerzonym**
- przykładowe zadania egzaminacyjne (wraz z rozwiązaniami oraz zasadami oceniania) na poziomie rozszerzonym.

CZĘŚĆ DRUGA jest dostępna tutaj.

Informator prezentuje przykładowe zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami. Do każdego zadania dodano wykaz wymagań ogólnych i szczegółowych z podstawy programowej kształcenia ogólnego, którym odpowiada dane zadanie. Zadania w *Informatorze* nie ilustrują wszystkich wymagań szczegółowych na poziomie podstawowym określonych w podstawie programowej, nie wyczerpują również wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej, zarówno ogólnych, jak i szczegółowych, może zapewnić właściwe przygotowanie w zakresie matematyki, w tym – właściwe przygotowanie do egzaminu maturalnego.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2018 r. poz. 467, z późn. zm.).

Przed przystąpieniem do dalszej lektury *Informatora* warto zapoznać się z ogólnymi zasadami obowiązującymi na egzaminie maturalnym od roku szkolnego 2022/2023. Są one określone w rozporządzeniu Ministra Edukacji i Nauki z dnia 26 lutego 2021 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. poz. 482) oraz – w skróconej formie – w części ogólnej *Informatora o egzaminie maturalnym od roku szkolnego 2022/2023*, dostępnej na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (https://cke.gov.pl/) i na stronach internetowych okręgowych komisji egzaminacyjnych.

ZADANIA NA EGZAMINIE

W arkuszu egzaminacyjnym znajdą się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte.

Zadania zamknięte to takie, w których zdający wybiera odpowiedź spośród podanych. Wśród zadań zamkniętych znajdą się m.in.:
- zadania wyboru wielokrotnego
- zadania typu prawda-fałsz
- zadania na dobieranie.

Zadania otwarte to takie, w których zdający samodzielnie formułuje odpowiedź. Wśród zadań otwartych znajdą się m.in.:
- zadania z luką, wymagające uzupełnienia zdania albo zapisania odpowiedzi jednym lub kilkoma wyrazami, symbolami lub wyrażeniami matematycznymi określającymi własności obiektów matematycznych, w tym wykonania lub uzupełniania wykresu, zależności, diagramu, tabeli
- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające wykonania prostego obliczenia lub bezpośredniego zapisania rozwiązania albo zapisania przeprowadzonego rozumowania lub obliczenia zwykle w dwóch lub trzech etapach
- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego i przedstawienia jej realizacji.

Przedstawione przez zdającego rozwiązanie zadania otwartego, w którym zdający m.in. oblicza, wyznacza, wyprowadza, uzasadnia, wykazuje, musi prezentować pełny tok rozumowania, uwzględniać warunki zadania, a także odwoływać się do twierdzeń matematycznych i własności odpowiednich obiektów matematycznych.

Wszystkie zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności określonych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej (w nawiasach zapisano numery celów kształcenia podstawy programowej):
- sprawność rachunkowa (I)
- wykorzystanie i tworzenie informacji (II)
- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (III)
- rozumowanie i argumentacja (IV).

Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły następujących obszarów tematycznych matematyki (w nawiasach zapisano numery treści nauczania podstawy programowej):

- liczby rzeczywiste, wyrażenia algebraiczne, równania i nierówności (I, II, III, IV)
- funkcje, ciągi, optymalizacja (V, VI, XIII)
- planimetria, geometria analityczna, stereometria (VII, VIII, IX, X)
- kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka (XI, XII).

Aby sprawdzić opanowanie przez zdających wymagania ogólnego „IV. rozumowanie i argumentacja", wśród zadań egzaminacyjnych znajdą się zadania na dowodzenie, wymagające od zdającego przeprowadzenia dowodu matematycznego. W celu sprawdzenia opanowania przez zdających wymagania ogólnego „III. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych" w *Informatorze* znajdą się również zadania z kontekstem praktycznym / realistycznym. Zadania tego typu będą miały uproszczone założenia, tzn. będą pomijały niektóre rzeczywiste warunki. Dzięki takiej idealizacji zagadnienia będzie można łatwiej zbudować jego adekwatny model matematyczny, który – po pierwsze – będzie opisywał istotę zagadnienia, po drugie – będzie korzystał z narzędzi dostępnych na danym etapie nauczania, a po trzecie – nie będzie wymagał specjalistycznej wiedzy z zakresu danego kontekstu.

OPIS ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym trwa 180 minut[2]. W arkuszu egzaminacyjnym znajdzie się od 29 do 40 zadań. Łączna liczba punktów, jakie można uzyskać za prawidłowe rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu, jest równa 50.

Liczbę zadań oraz liczbę punktów możliwych do uzyskania za poszczególne rodzaje zadań w całym arkuszu przedstawiono w poniższej tabeli.

Rodzaj zadań	Liczba zadań	Łączna liczba punktów	Udział w wyniku sumarycznym
zamknięte	20–25	25	50%
otwarte	9–15	25	50%
RAZEM	**29–40**	**50**	**100%**

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania. Wiązka zadań to zestaw od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań może się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych zdający będą zaznaczali na karcie odpowiedzi (z wyjątkiem zdających ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, którzy są zwolnieni z tego obowiązku).

[2] Czas trwania egzaminu może zostać wydłużony w przypadku zdających ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, w tym niepełnosprawnych, oraz w przypadku cudzoziemców. Szczegóły są określane w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu maturalnego* w danym roku szkolnym.

ZASADY OCENIANIA

Zadania zamknięte

Zadania zamknięte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna lub niepełna albo brak odpowiedzi.

ALBO

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
1 pkt – odpowiedź częściowo poprawna lub odpowiedź niepełna.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadania otwarte

Za poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać maksymalnie 1, 2, 3 lub 4 punkty. Za każde poprawne rozwiązanie, inne niż opisane w zasadach oceniania, można przyznać maksymalną liczbę punktów, o ile rozwiązanie jest merytorycznie poprawne, zgodne z poleceniem i warunkami zadania.

Zadania otwarte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

Zadania otwarte z luką

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

  1 pkt – rozwiązanie poprawne.
  0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie całkowicie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie częściowo poprawne lub rozwiązanie niepełne.
  0 pkt – rozwiązanie całkowicie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

  1 pkt – rozwiązanie poprawne.
  0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 3 pkt:

  3 pkt – rozwiązanie poprawne.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 4 pkt:

  4 pkt – rozwiązanie poprawne.
  3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

W rozwiązaniu zadań otwartych wyróżniony został najważniejszy etap, nazywany pokonaniem zasadniczych trudności zadania. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie można otrzymać za bezbłędne rozwiązanie danego zadania. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżnia się jeszcze jeden etap (w przypadku zadań za 3 pkt) lub dwa etapy poprzedzające (w przypadku zadań za 4 pkt): dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania oraz/lub dokonanie niewielkiego postępu, który jest konieczny do rozwiązania zadania.

Etapy rozwiązania dla każdego zadania będą opisane w zasadach oceniania dla danego zadania. Ponadto dla różnych sposobów rozwiązania danego zadania te same etapy będą opisywały w zasadach oceniania jakościowo równoważny postęp na drodze do rozwiązania zadania.

WYBRANE OZNACZENIA I SYMBOLE MATEMATYCZNE

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym mogą być stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych
- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych
- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
- $A \cup B$ – suma zbiorów A oraz B
- $A \cap B$ – iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)
- $A \setminus B$ – różnica zbioru A i zbioru B.

- $A \subset B$ – zbiór A jest podzbiorem zbioru B
- $x \in A$ – element x należy do zbioru A
- $[a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x \leq b$
  $[a, b)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x < b$
  $(a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x \leq b$
  (a, b) – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$
  Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:
  $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$.

MATERIAŁY I PRZYBORY POMOCNICZE NA EGZAMINIE Z MATEMATYKI

Materiały i przybory pomocnicze, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym z matematyki, to:

- linijka
- cyrkiel
- kalkulator prosty
- *Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*.

Szczegółowe informacje dotyczące materiałów i przyborów pomocniczych, z których mogą korzystać zdający na egzaminie maturalnym (w tym osoby, którym dostosowano warunki przeprowadzenia egzaminu), będą ogłaszane w komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami

W *Informatorze* dla każdego zadania podano:

- liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie (w nawiasach, po numerze zadania)
- najważniejsze wymagania ogólne i szczegółowe, które są sprawdzane w tym zadaniu
- zasady oceniania rozwiązania tego zadania
- poprawne rozwiązanie w przypadku zadania zamkniętego oraz przykładowe rozwiązanie w przypadku zadania otwartego.

W przykładowych rozwiązaniach zadań otwartych są wyodrębnione dodatkowe komentarze, które nie podlegają ocenie. Dodatkowe komentarze wyodrębniono w ramkach (podobnie jak ten akapit).

LICZBY RZECZYWISTE, WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2021 : \left(1 - \frac{1}{2022}\right) - \left(1 - \frac{2022}{2021}\right) : \frac{1}{2021}$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2021 **D.** 2023

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

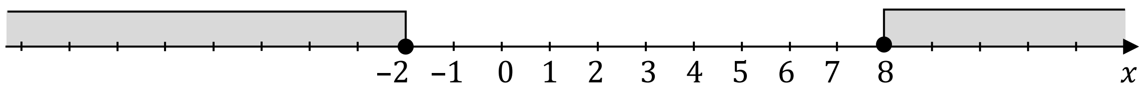
Zadanie 2. (0–1)

Dana jest nierówność:

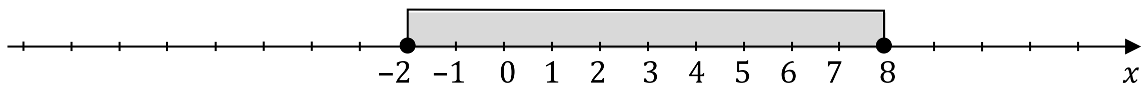
$$|x-3| \geq 5$$

Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

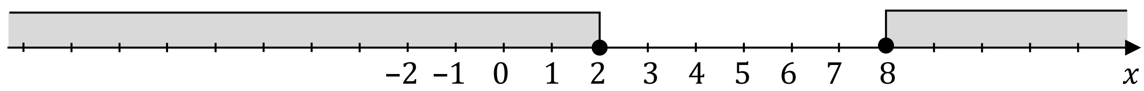
A.



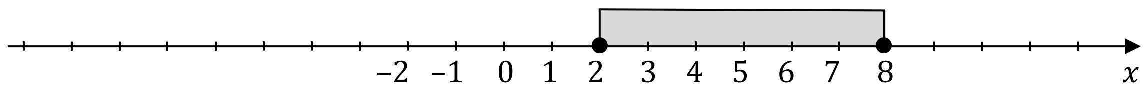
B.



C.



D.



Wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:

6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu $|x+4|=5$, $|x-2|<3$, $|x+3|>4$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 3. (0–1)

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)

A. 30% **B.** 34% **C.** 36% **D.** 43%

Wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 4. (0–2)

Dane są dwie liczby x i y, takie, że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$. Wynik podaj bez niewymierności w mianowniku.

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;
8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, […].

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{x+y}{x}$ do postaci $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{x+y}{x}$ do postaci $1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ lub $\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

$$\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sposób 2.

$$\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=1+\frac{2}{(1+\sqrt{5})}\cdot\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})}=1+\frac{(2-2\sqrt{5})}{-4}=$$
$$=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2+\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sposób 3.

$$\frac{x+y}{x}=\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x}{y}}=\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}\right)}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{(3+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})}\cdot\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sposób 4.

Z równości $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wyznaczamy x:

$$x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)y$$

Wyznaczony x podstawimy do wyrażenia $\frac{x+y}{x}$:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot y+y}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot y}=\frac{y\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)}{y\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})}\cdot\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Zadanie 5. (0–2)

Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\boldsymbol{a \cdot b}}{\boldsymbol{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} : \frac{\boldsymbol{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}{\boldsymbol{a - b}}$ **dla podanych** $\boldsymbol{a}$ **i** $\boldsymbol{b}$**.**

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości wyrażenia dla podanych a i b oraz zapisanie prawidłowego wyniku: $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = 1$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci: $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = a \cdot b$

LUB

– wykazanie, że liczby a i b albo liczby $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ i $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ są wzajemnie odwrotne.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Przekształcamy równoważnie wyrażenie do najprostszej postaci:

$$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a \cdot b(a - b)}{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a \cdot b(a - b)}{a - b} = a \cdot b$$

Podstawiamy wartości a i b do otrzymanego wyrażenia i obliczamy jego wartość:

$$a \cdot b = \left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

Sposób 2.

Zauważmy, że:

$$a \cdot b = (\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

zatem liczby a i b są wzajemnie odwrotne. Zauważamy także, że:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{a - b}{a - b} = 1$$

co oznacza, że liczby $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ i $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ także są wzajemnie odwrotne: $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Z powyższych zależności wynika:

$$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = ab \cdot \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Zadanie 6. (0–2)

Dana jest liczba $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, gdzie a należy do zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zaznacz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba x jest wymierna dla

A. $a = 5$

B. $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$

C. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0{,}3$

D. $a = 6$

E. $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$

F. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

G. $a = -\sqrt{6}$

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: C i E.
1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: C albo E.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

CE

Komentarz

Przekształcimy równoważnie wyrażenie określające liczbę x – w tym celu zastosujemy m.in. wzór skróconego mnożenia:

$$x = a - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = a - \left(\sqrt{3}^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2}^2\right) = a - \left(3 - 2\sqrt{6} + 2\right)$$
$$= a - \left(5 - 2\sqrt{6}\right) = a - 5 + 2\sqrt{6}$$

Liczba x będzie wymierna, jeśli liczba a będzie postaci: $a = q - 2\sqrt{6}$, gdzie q będzie dowolną liczbą wymierną:

$$x = q - 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = q - 5$$

Sprawdzimy, które z liczb a podanych w odpowiedziach **A–G** mają postać $a = q - 2\sqrt{6}$ (gdzie q jest wymierne):

A. $a = 5$
B. $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$
C. $a = \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 + 0{,}3 = 5 - 2\sqrt{6} + 0{,}3 = 5{,}3 - 2\sqrt{6}$
D. $a = 6$
E. $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$
F. $a = 5 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5 - 4\sqrt{6}$
G. $a = -\sqrt{6}$

Liczby podane w odpowiedziach C i E mają żądaną postać.

Zadanie 7. (0–2)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)}=0$$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:

7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania podanego w treści zadania (rozwiązanie równania $(4x+1)(x-5)=0$ lub równania $4x+1=0$ oraz wyznaczenie dziedziny równania) i podanie wyniku: $x=-\frac{1}{4}$.

1 pkt – poprawne rozwiązanie równania $(4x+1)(x-5)=0$: $x=-\frac{1}{4}$ lub $x=5$

LUB

– poprawne wyznaczenie dziedziny równania $\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)}=0$: $x\neq 5$ oraz $x\neq -3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Rozwiązaniami równania postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$ są takie liczby x_i, dla których:

$$V(x_i)=0 \quad \text{oraz} \quad W(x_i)\neq 0$$

Mianownik ułamka $\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)}$ musi być różny od zera, zatem:

$$(2x-10)(x+3)\neq 0$$

Iloczyn jest różny od zera, gdy każdy z czynników iloczynu jest różnym od zera:

$2x - 10 \neq 0$ oraz $x + 3 \neq 0$

$x \neq 5$ oraz $x \neq -3$

Gdy mianownik ułamka jest różny od zera, to ułamek jest wtedy równy zero, gdy licznik jest równy zero, zatem:

$$(4x + 1)(x - 5) = 0$$

Iloczyn jest równy zero, gdy co najmniej jeden z jego czynników jest równy zero:

$4x + 1 = 0$ lub $x - 5 = 0$

$x = -\frac{1}{4}$ lub $x = 5$

Ponieważ $x \neq 5$, to rozwiązaniem równania jest liczba $x = -\frac{1}{4}$.

Sposób 2.

Wyrażenie po lewej stronie równania $\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$ ma sens liczbowy, gdy:

$$(2x - 10)(x + 3) \neq 0$$

$x \neq 5$ oraz $x \neq -3$

Zatem równanie $\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$ jest określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{5, -3\}$. Przekształcimy równoważnie równanie:

$$\frac{(4x + 1)(x - 5)}{(2x - 10)(x + 3)} = 0$$

$$\frac{(4x + 1)(x - 5)}{2(x - 5)(x + 3)} = 0$$

$$\frac{4x + 1}{2(x + 3)} = 0$$

Gdy mianownik ułamka jest różny od zera, to ułamek jest wtedy równy zero, gdy licznik jest równy zero, zatem:

$$4x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Zadanie 8. (0–2)

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

A. o 40% pensji pana Y.
B. o 90% pensji pana Y.
C. o 150% pensji pana Y.
D. o 275% pensji pana Y.

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

E. o 60% pensji pana X.
F. o 73% pensji pana X.
G. o 90% pensji pana X.
H. o 150% pensji pana X.

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych […] przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.
1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1.C 2.E

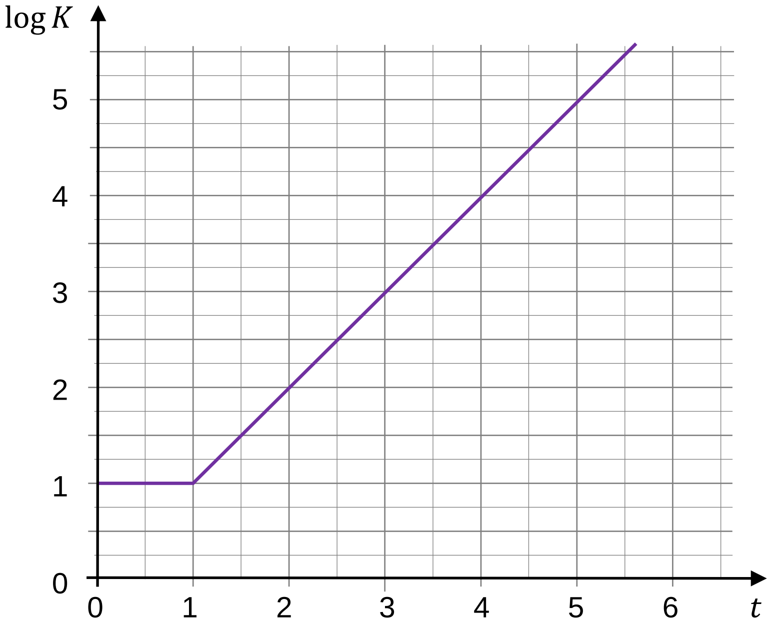
Komentarz

Średnią krajową oznaczymy jako s, pensję pana X jako x, a pensję pana Y jako y.
Wtedy: $x = 1{,}5s \quad y = 0{,}6s$. Wykonujemy obliczenia:

$$\frac{x}{y} = \frac{1{,}5s}{0{,}6s} = 2{,}5 \ (250\% = 100\% + 150\%) \qquad \frac{y}{x} = \frac{0{,}6s}{1{,}5s} = 0{,}4 \ (40\% = 100\% - 60\%)$$

Zadanie 9. (0–1)

Na wykresie przedstawiono zależność $\log K(t)$, gdzie $K(t)$ jest liczbą bakterii w próbce po czasie t wyrażonym w godzinach, jaki upłynął od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Gdy upłynęły dokładnie trzy godziny od chwili $t = 0$, liczba K bakterii była równa

A. 3 **B.** 100 **C.** 1000 **D.** 10000

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów i tabel.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 10. (0–1)
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_2\left[\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8\right]$ jest równa

A. $\sqrt{2}$ **B.** 7 **C.** 14 **D.** 2^7

Wymaganie ogólne
I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe
I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 11. (0–3)

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki:

$$a \neq 0, b \neq 0 \quad \text{oraz} \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3.$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, spełniających powyższe warunki.

Wymaganie ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;
3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;

III. Równania i nierówności. Zdający:
1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej […].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości ilorazu $\frac{a}{b}$ oraz podanie prawidłowego wyniku $\frac{a}{b} = -1$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $3ab(a+b)=0$ oraz wyznaczenie rozwiązań tego równania: $a=0$, $b=0$, $a=-b$ (bez uwzględnienia warunków zadania).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $3ab(a+b)=0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Równanie podane w zadaniu przekształcamy w sposób równoważny. Do prawej strony równania zastosujemy wzór na trzecią potęgę sumy liczb a i b:

$$a^3+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$0=3a^2b+3ab^2$$

$$3ab(a+b)=0$$

Iloczyn po lewej stronie równania jest równy 0, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy 0. Zatem:

$3ab=0$ lub $a+b=0$

Stąd mamy:

$a=0$ lub $b=0$ lub $a=-b$

Gdy uwzględnimy warunki zadania $a\neq 0$ i $b\neq 0$, to otrzymujemy:

$$\frac{a}{b}=\frac{-b}{b}=-1$$

Sposób 2.

Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$a^3+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3+b^3-(a+b)^3=0$$

$$a^3+[b^3-(a+b)^3]=0$$

Do wyrażenia w nawiasie kwadratowym zastosujemy wzór na różnicę sześcianów:

$$a^3+[b-(a+b)]\cdot[b^2+b\cdot(a+b)+(a+b)^2]=0$$

$$a^3+(-a)\cdot(b^2+ab+b^2+a^2+2ab+b^2)=0$$

$$a^3+(-a)\cdot(a^2+3ab+3b^2)=0$$

$$a^3-a^3-3a^2b-3ab^2=0$$

$$-3ab(a+b)=0$$

Ponieważ $a\neq 0$ i $b\neq 0$, to powyższe równanie jest spełnione gdy:

$$a+b=0$$

Zatem:

$a=-b$ stąd otrzymujemy $\frac{a}{b}=-1$

Zadanie 12. (0–1)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.	**P**	**F**
2.	Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2-1}$.	**P**	**F**

Wymagania ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 13. (0–3)

Rozwiąż równanie $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 6 = 0$.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnienie ich poprawności.

Wymaganie szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:

5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania oraz podanie prawidłowych rozwiązań:
$x_{11} = 1+\sqrt{2}$, $x_{12} = 1-\sqrt{2}$, $x_{21} = 1+\sqrt{3}$, $x_{22} = 1-\sqrt{3}$.

2 pkt – rozwiązanie równania $z^2 - 5z + 6 = 0$: $z_1 = 2$, $z_2 = 3$ oraz zapisanie równań równoważnych: $2 = (x-1)^2$, $3 = (x-1)^2$

LUB

– prawidłowe obliczenie jednego z pierwiastków równania $z^2 - 5z + 6 = 0$: $z_1 = 2$ (drugi pierwiastek obliczony błędnie lub wcale) albo $z_2 = 3$ (drugi pierwiastek obliczony błędnie lub wcale) oraz konsekwentne – z tym prawidłowo wyznaczonym pierwiastkiem – rozwiązanie równania podanego w zadaniu i zapisanie:
$x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$ albo $x_1 = 1+\sqrt{3}$, $x_2 = 1-\sqrt{3}$.

1 pkt – wykonanie odpowiedniego podstawienia i przekształcenie do równania postaci równoważnej równaniu $z^2 - 5z + 6 = 0$, gdzie $z \geq 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Zauważmy, że równanie w tym zadaniu jest przykładem równania dwukwadratowego. Dlatego w równaniu $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 6 = 0$ podstawiamy $z = (x-1)^2$, gdzie $z \geq 0$, po czym otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą z:

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \qquad z = (x-1)^2 \quad \text{gdzie} \quad z \geq 0$$

Sposób 1. rozwiązania równania $z^2 - 5z + 6 = 0$

Rozwiążemy równanie kwadratowe wykorzystując metodę dopełnienia wyrażenia do pełnego kwadratu. Przekształcimy równoważnie trójmian kwadratowy po lewej stronie równania:

$$(z^2 - 5z) + 6 = \left[z^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}z + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] + 6 = \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 =$$
$$= \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Rozwiążemy równanie po przekształceniu równoważnym:

$$\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{zatem} \quad \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left|z - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$z - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad z - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$z = 3 \quad \text{lub} \quad z = 2$$

Sposób 2. rozwiązania równania $z^2 - 5z + 6 = 0$

Obliczymy tzw. wyróżnik równania kwadratowego (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$\Delta_z = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1.$$

Ponieważ $\Delta_z > 0$ to możemy zastosować gotowe wzory (podane w *Wybranych wzorach matematycznych*) na rozwiązania równania kwadratowego:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_z}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_z}}{2a}$$

Rozwiązania równania kwadratowego:

$$z_1 = 2 \quad \text{lub} \quad z_2 = 3$$

Powracamy do podstawienia $z = (x-1)^2$ i wyznaczamy rozwiązania równania podanego w zadaniu:

$$(x-1)^2 = 2 \quad \text{lub} \quad (x-1)^2 = 3$$

$$|x-1| = \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad |x-1| = \sqrt{3}$$

Stąd:

$$x_{11} = \sqrt{2} + 1 \ \text{lub} \ x_{12} = -\sqrt{2} + 1 \quad \text{lub} \quad x_{21} = \sqrt{3} + 1 \ \text{lub} \ x_{22} = -\sqrt{3} + 1$$

Zadanie 14. (0–2)

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danego wyrażenia do postaci $5 \cdot (4n^2 + 6n + 1) + 2$ oraz zapisanie, że $(4n^2 + 6n + 1)$ jest liczbą całkowitą.

1 pkt – przekształcenie danego wyrażenia do postaci $5 \cdot (4n^2 + 6n + 1) + 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Krok 1. dowodu

Powołamy się na definicję reszty z dzielenia dwóch liczb całkowitych. Liczba całkowita W przy dzieleniu przez liczbę całkowitą P daje resztę całkowitą R, wtedy, gdy istnieje liczba całkowita Q taka, że $W = PQ + R$ oraz $0 \leq R < P$. (Np. Liczba 22 przy dzieleniu przez 5 daje resztę równą 2, ponieważ $22 = 5 \cdot 4 + 2$, gdzie 4 jest liczbą całkowitą oraz $2 < 5$).

Liczbę określoną w zadaniu przekształcimy do postaci: $5 \cdot Q + 2$:

$$20n^2 + 30n + 7 = 20n^2 + 30n + 5 + 2 = 5 \cdot (4n^2 + 6n + 1) + 2$$

Krok 2. dowodu

Wykażemy dalej, że $4n^2 + 6n + 1$ jest liczbą całkowitą.

Ponieważ n jest liczbą naturalną, to $4n^2$ oraz $6n$ są liczbami całkowitymi. Suma tych liczb całkowitych oraz liczby 1 jest liczbą całkowitą.

Z kroków 1.–2. dowodu wynika, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zadanie 15. (0–3)

Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że obie są niepodzielne przez 3.

Udowodnij, że liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 9.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
   1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie a^3+b^3 jako $9\cdot(6k^3+9k^2+5k+1)$ oraz zapisanie, że $6k^3+9k^2+5k+1$ jest liczbą całkowitą (kroki 1.–3. dowodu)
LUB
– przeprowadzenie pełnego dowodu: zapisanie a^3+b^3 jako $54k^3+81k^2+45k+9$ oraz zapisanie, że każdy składnik sumy jest podzielny przez 9.

2 pkt – zapisanie a^3+b^3 jako $(3k+1)^3+(3k+2)^3$ oraz przekształcenie tego wyrażenia do postaci równoważnej wyrażeniu $54k^3+81k^2+45k+9$ (kroki 1.–2. dowodu).

1 pkt – zapisanie liczb a i b w postaci: $a=3k+1$ oraz $b=3k+2$, gdzie $k\in\{0,1,2,3,4,\dots\}$ (krok 1. dowodu).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Krok 1. dowodu

Dwie kolejne liczby naturalne a i b, niepodzielne przez 3, można zapisać w postaci:

$$a=3k+1 \text{ oraz } b=3k+2, \text{ gdzie } k\in\{0,1,2,3,4,\dots\}$$

Krok 2. dowodu

Zapiszemy liczbę z wykorzystaniem zapisu (krok 1. dowodu) oraz wzoru na sześcian sumy:

$$(3k+1)^3 + (3k+2)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 =$$
$$= 54k^3 + 81k^2 + 45k + 9 = 9 \cdot (6k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$$

Krok 3. dowodu

Liczbę $a^3 + b^3$ zapisaliśmy jako iloczyn liczby 9 oraz liczby $6k^3 + 9k^2 + 5k + 1$. Dlatego, aby udowodnić podzielność przez 9, wystarczy wykazać, że drugi czynnik w rozkładzie (krok 2. dowodu) jest liczbą całkowitą.

Ponieważ $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, to $6k^3$, $9k^2$ oraz $5k$ są liczbami całkowitymi. Suma liczb całkowitych oraz liczby 1 jest liczbą całkowitą.

Z kroków 1.–3. dowodu wynika, że suma sześcianów dwóch kolejnych liczb niepodzielnych przez 3 jest liczbą podzielną przez 9.

Zadanie 16. (0–3)

Dany jest wielomian

$$W(x) = 3x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że ten wielomian można zapisać w postaci iloczynowej:

$$W(x) = (x+2)Q(x)$$

gdzie $Q(x)$ jest pewnym trójmianem kwadratowym.

Wyznacz wielomian $Q(x)$ oraz oblicz wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

I. Sprawność rachunkowa.
   Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający:
   6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$;

III. Równania i nierówności. Zdający:
   6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej […].

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, obliczenie pierwiastków wielomianu $W(x)$ oraz podanie wyników: $Q(x)=3x^2+2x-1$, $x_1=-2, x_2=-1$, $x_3=\frac{1}{3}$.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$ oraz prawidłowa postać tego wielomianu: $Q(x)=3x^2+2x-1$

LUB

– poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, błędy w obliczeniach współczynników a, b, c oraz poprawna metoda wyznaczenia pierwiastków wielomianu $W(x)$, tzn.: zapisanie $x+2=0$, $Q(x)=0$ oraz rozwiązanie obu równań.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, tzn.: zapisanie równania $3x^3+mx^2+3x-2=(x+2)(ax^2+bx+c)$ oraz postępowanie prowadzące do wyznaczenia a, b, c: przekształcenie prawej strony do sumy algebraicznej i porównywanie współczynników przy tych samych potęgach x po lewej i prawej stronie równania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 2.

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, obliczenie pierwiastków wielomianu $W(x)$ oraz podanie wyników: $Q(x)=3x^2+2x-1$, $x_1=-2, x_2=-1$, $x_3=\frac{1}{3}$.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, tzn. zastosowanie algorytmu dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$ albo zapisanie $3x^3+8x^2+3x-2=(x+2)(ax^2+bx+c)$ oraz postępowanie prowadzące do wyznaczenia a, b, c, oraz poprawna postać tego wielomianu: $Q(x)=3x^2+2x-1$

LUB

– poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, błędy w obliczeniach oraz poprawna metoda obliczenia pierwiastków wielomianu $W(x)$, tzn. zapisanie $x+2=0$, $Q(x)=0$ oraz rozwiązanie obu równań.

1 pkt – zapisanie, że $W(-2)=0$, oraz poprawne obliczenie współczynnika $m=8$

LUB

– zapisanie, że $W(-2)=0$, błędy w obliczeniach przy wyznaczeniu m oraz postępowanie prowadzące do wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, tzn. zastosowanie algorytmu dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$ albo zapisanie $3x^3+mx^2+3x-2=(x+2)(ax^2+bx+c)$, oraz postępowanie prowadzące do wyznaczenia a, b, c.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 3.

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, obliczenie pierwiastków wielomianu $W(x)$ oraz podanie wyników: $Q(x)=3x^2+2x-1$, $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{1}{3}$.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, tzn. zastosowanie algorytmu dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$ oraz prawidłowa postać tego wielomianu: $Q(x)=3x^2+2x-1$

LUB

– poprawna metoda wyznaczenia wielomianu $Q(x)$, błędy w obliczeniach oraz poprawna metoda obliczenia pierwiastków wielomianu $W(x)$, tzn. zapisanie $x+2=0$, $Q(x)=0$ oraz rozwiązanie obu równań.

1 pkt – zastosowanie algorytmu dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$ oraz poprawne obliczenie współczynnika $m=8$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wykorzystamy informację podaną w zadaniu. Zapiszemy wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu dwumianu $x+2$ i wielomianu $Q(x)$:

$$3x^3+mx^2+3x-2=(x+2)Q(x)$$

Wielomian $Q(x)$ jest trójmianem kwadratowym, zatem powyższą równość zapiszemy w postaci:

$$3x^3+mx^2+3x-2=(x+2)(ax^2+bx+c)$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c. Prawą stronę przekształcimy do postaci sumy algebraicznej wyrażeń z potęgą zmiennej x. Następnie, aby obliczyć współczynniki a, b, c, m porównamy wyrażenia z odpowiednimi potęgami zmiennej x po prawej i lewej stronie równości:

$$3x^3+mx^2+3x-2=ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c$$

$$3x^3+mx^2+3x-2=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$$

Współczynniki przy kolejnych potęgach x muszą być równe, zatem:

$$\begin{cases} 3 = a \\ m = b + 2a \\ 3 = c + 2b \\ -2 = 2c \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ m = 8 \end{cases}$$

Wielomian $Q(x)$ ma postać $Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Pierwiastki wielomianu $W(x)$ obliczymy z jego postaci iloczynowej:

$$W(x) = (x + 2)(3x^2 + 2x - 1) = 0$$

stąd

$x + 2 = 0$ lub $3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = \frac{1}{3}$

Sposób 2.

Wyznaczymy jeden z pierwiastków $W(x)$. Wykorzystamy informację o rozkładzie wielomianu $W(x)$ na czynniki:

$$W(x) = (x + 2)Q(x) = 0$$

stąd $x + 2 = 0$ czyli $x = -2$

Obliczymy m. Ponieważ $W(-2) = 0$, to:

$$W(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + m(-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 0$$
$$-24 + 4m - 8 = 0$$
$$m = 8$$

Zatem:

$$W(x) = x^3 + 8x^2 + 3x - 2$$

Wyznaczymy $Q(x)$ – zastosujemy algorytm dzielenia wielomianów:

$$W(x) = (x + 2)Q(x) \quad \text{stąd} \quad W(x) : (x + 2) = Q(x)$$

$$\begin{array}{l} (3x^3 + 8x^2 + 3x - 2) : (x + 2) = 3x^2 + 2x - 1 \\ \underline{-(3x^3 + 6x^2)} \\ \qquad 2x^2 + 3x - 2 \\ \quad \underline{-(2x^2 + 4x)} \\ \qquad\qquad -x - 2 \\ \qquad\quad \underline{-(-x - 2)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Zatem:

$$Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x) = 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$ obliczymy korzystając z jego postaci iloczynowej, gdy znamy $Q(x)$:

$$W(x) = (x + 2)(3x^2 + 2x - 1) = 0$$

stąd:

$x + 2 = 0$ lub $3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = -2$ lub $x = -1$ lub $x = \frac{1}{3}$

Sposób 3.

Wykorzystamy informację podaną w zadaniu o rozkładzie $W(x)$ na czynniki:

$$3x^3 + mx^2 + 3x - 2 = (x + 2)Q(x)$$

Z powyższego zapisu iloczynowego wynika, że: $Q(x) = (3x^3 + mx^2 + 3x - 2):(x + 2)$. Zastosujemy algorytm dzielenia wielomianów:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 + mx^2 + 3x - 2):(x + 2) = 3x^2 + (m - 6)x + 15 - 2m \\
\underline{-(3x^3 + 6x^2)} \\
\qquad (m - 6)x^2 + 3x \\
\quad \underline{-(m - 6)x^2 - (2m - 12)x} \\
\qquad\qquad\qquad (3 - 2m + 12)x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(15 - 2m)x - 30 + 4m} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -32 + 4m
\end{array}$$

Zatem:

$$Q(x) = 3x^2 + (m - 6)x + 15 - 2m$$

a reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x + 2)$ jest dana wyrażeniem:

$$R(x) = -32 + 4m$$

Na podstawie zapisu iloczynowego $W(x) = (x + 2)Q(x)$ wnioskujemy, że reszta z dzielenia $W(x):(x + 2)$ jest równa zero:

$R(x) = 0$ zatem $-32 + 4m = 0$ więc $m = 8$

Stąd:

$$Q(x) = 3x^2 + (8 - 6)x + 15 - 2m = 3x^2 + 2x - 1$$

Pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x) = (x + 2)(3x^2 + 2x - 1)$ obliczymy rozwiązując równanie $Q(x) = 0$:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$x_1 = \frac{1}{3}$ lub $x_2 = -1$

FUNKCJE, CIĄGI, OPTYMALIZACJA

Zadanie 17. (0–1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 - b - 5\sqrt{2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2} + 1$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy

A. $b = 1$ **B.** $b = 7$ **C.** $b = 1 - 3\sqrt{2}$ **D.** $b = 3 - 3\sqrt{2}$

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

I. Sprawność rachunkowa.
   Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   2) Oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 18. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 + bx - 5$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Współczynnik b jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f

A.	ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,	ponieważ	**1.**	$b^2 + 60 > 0$.
B.	ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,		**2.**	$b^2 + 60 = 0$.
C.	nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,		**3.**	$b^2 + 60 < 0$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
  3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

III. Równania i nierówności. Zdający:
  4) Rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

V. Funkcje. Zdający:
  8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

Zasady oceniania

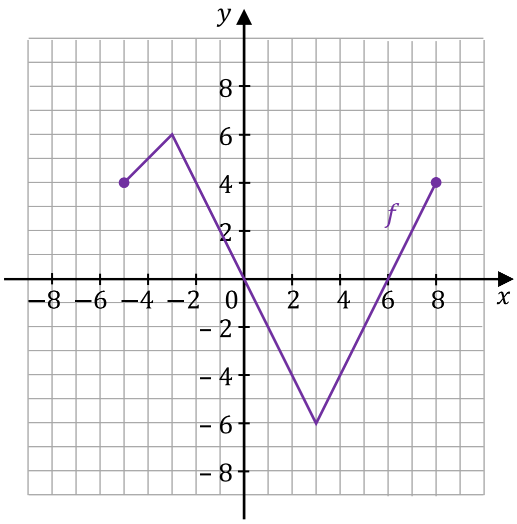
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A1

Zadanie 19.

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.



Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [-5, 8]$.

Zadanie 19.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności:

$$\boldsymbol{f(x) > 2}$$

....

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby […].

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

$[-5, -1) \cup (7,8]$

Zadanie 19.2. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

....

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

4) odczytuje z wykresu funkcji […] przedziały monotoniczności […].

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

$[-3,3]$

Zadanie 19.3. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdanie było prawdziwe.

Największa wartość funkcji f jest równa liczbie .... , a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie ....

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

4) odczytuje z wykresu funkcji […] największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym.

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązania

Sposób 1. zapisu rozwiązania

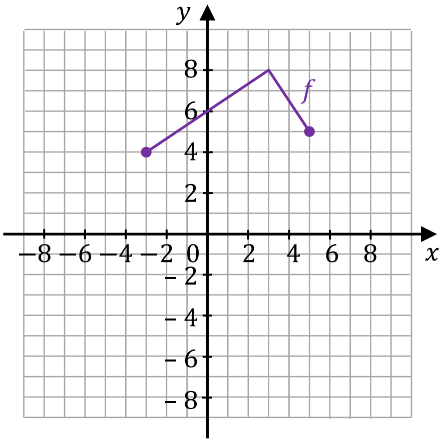
Największa wartość funkcji f jest równa liczbie ...6... , a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie ...-6... .

Sposób 2. zapisu rozwiązania

Największa wartość funkcji f jest równa liczbie ...$y=6$... , a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie ...$y=-6$... .

Zadanie 20. (0–2)

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok. Ta funkcja jest określona dla $x \in [-3, 5]$. Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f następująco:



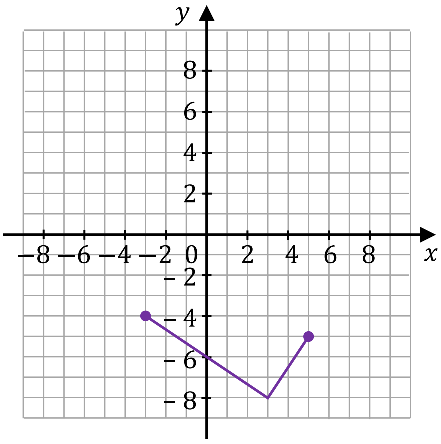
$$y = g(x) = f(x + 2) \qquad\qquad y = h(x) = f(-x)$$

Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji – w tym wykresy funkcji g oraz h.

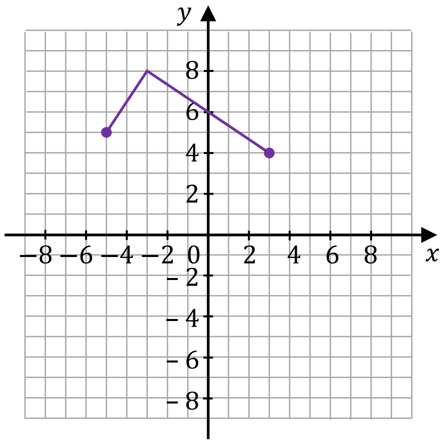
Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

Nr zadania	Funkcja	Rysunek
20.1.	$y = g(x)$	
20.2.	$y = h(x)$	

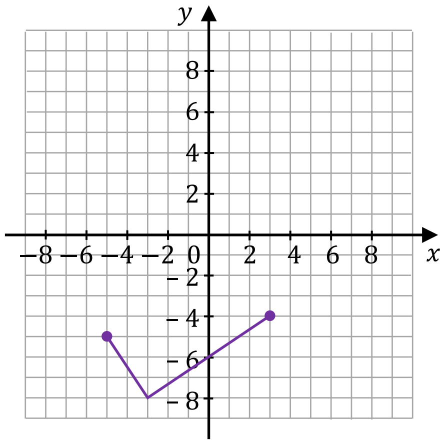
A.



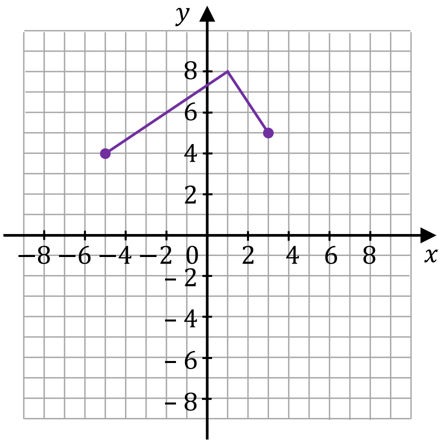
B.



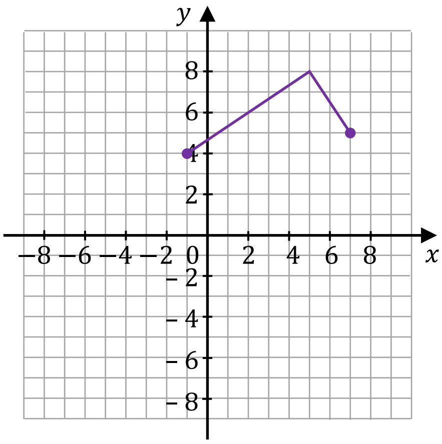
C.



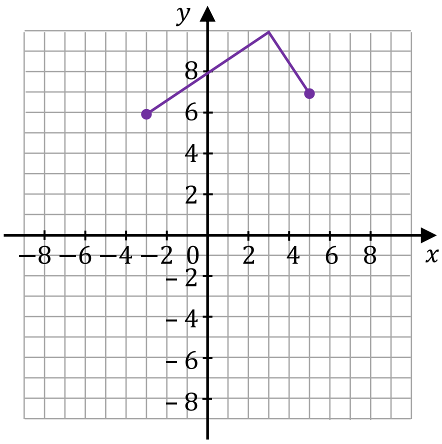
D.



E.



F.



Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Zasady oceniania

2 pkt – prawidłowe przyporządkowanie wykresów dla obu funkcji.
1 pkt – prawidłowe przyporządkowanie wykresu dla jednej funkcji.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

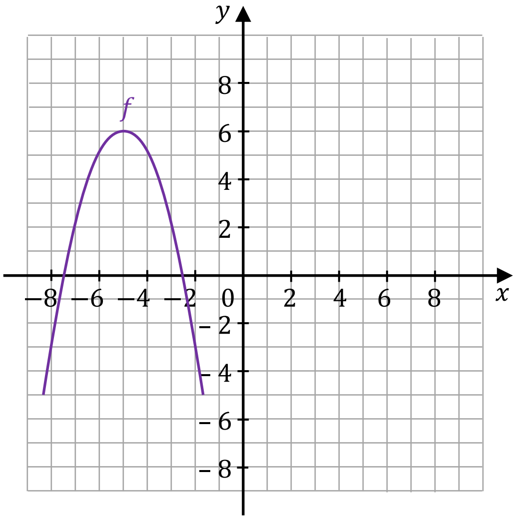
Nr zadania	Funkcja	Rysunek
20.1.	$y = g(x)$	**D**
20.2.	$y = h(x)$	**B**

Zadanie 21.

Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 21.1. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa $y = f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A–D to wzór funkcji f.

Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest określona wzorem

A. $y = -(x+5)^2 - 6$
B. $y = -(x+5)^2 + 6$
C. $y = -(x-5)^2 - 6$
D. $y = -(x-5)^2 + 6$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 21.2. (0–2)

Do wykresu pewnej funkcji kwadratowej $y = g(x)$ należy punkt o współrzędnych $P = (2, -6)$. Osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 3$, a jednym z miejsc zerowych funkcji g jest $x_1 = 1$.

Wyznacz i zapisz wzór funkcji $y = g(x)$ w postaci iloczynowej.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia postaci iloczynowej funkcji g oraz zapisanie jej wzoru:
$$y = g(x) = 2(x - 1)(x - 5).$$
1 pkt – zapisanie wzoru funkcji g w postaci $y = g(x) = a(x - 1)(x - 5)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Zauważmy, że punkt przecięcia osi symetrii funkcji kwadratowej z osią Ox jest środkiem odcinka, którego końcami są miejsca zerowe tej funkcji. Zatem:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{zatem} \quad 3 = \frac{1 + x_2}{2} \quad \text{stąd} \quad x_2 = 5$$

Zapiszemy wzór funkcji g w postaci iloczynowej dla pewnego rzeczywistego współczynnika a:

$$y = g(x) = a(x - 1)(x - 5)$$

Obliczymy a. Wykres funkcji przechodzi przez punkt $P = (2, -6)$ zatem:

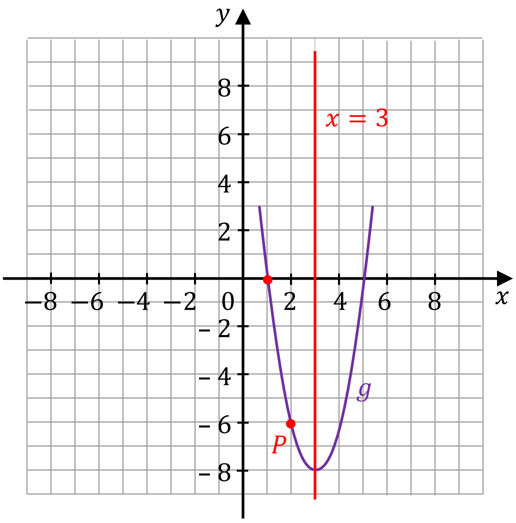
$$-6 = a(2-1)(2-5) \quad \text{czyli} \quad -6 = a \cdot (-3) \quad \text{zatem} \quad a = 2$$

Wzór funkcji $y = g(x)$ w postaci iloczynowej ma postać:

$$y = g(x) = 2(x-1)(x-5)$$

Sposób 2.

Naszkicujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej $y = g(x)$, który spełnia warunki:
1) przechodzi przez punkt $P = (2, -6)$,
2) posiada oś symetrii $x = 3$,
3) przecina oś x w punkcie $(1,0)$ (miejsce zerowe funkcji g to $x_1 = 1$).



Drugie miejsce zerowe funkcji g jest położone symetrycznie do $x_1 = 1$ względem prostej $x = 3$. Zatem drugim miejscem zerowym jest $x_2 = 5$. Zapiszemy oba miejsca zerowe:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 5$$

Zapiszemy wzór funkcji g w postaci iloczynowej dla pewnego rzeczywistego współczynnika a:

$$y = g(x) = a(x-1)(x-5)$$

Wyznaczymy a. Wykres funkcji przechodzi przez punkt $P = (2, -6)$, zatem:

$$-6 = a(2-1)(2-5)$$

Stąd $a = 2$.

Wzór funkcji $y = g(x)$ w postaci iloczynowej ma postać:

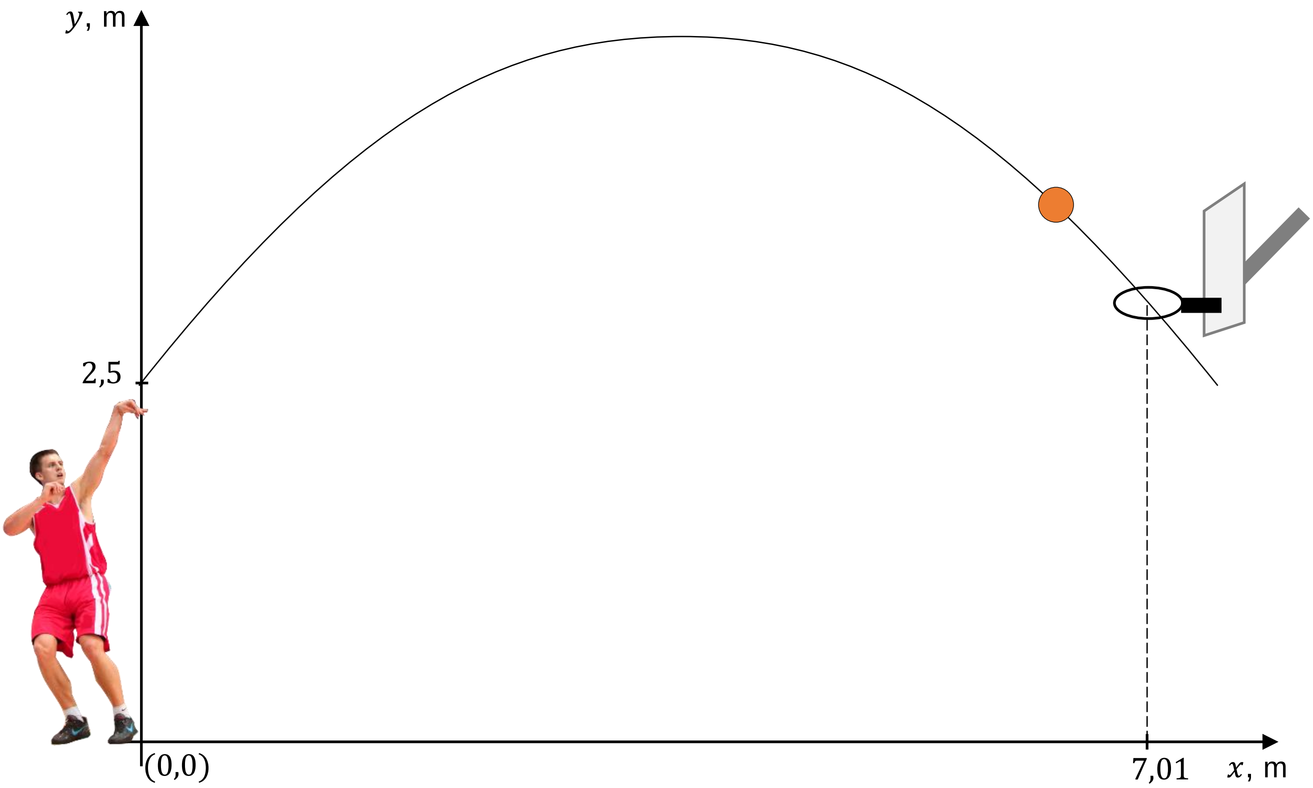
$$y = g(x) = 2(x-1)(x-5)$$

Zadanie 22.

Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem rzutu – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli. Koszykarz wykonał rzut do kosza z odległości $x_k = 7{,}01$ m, licząc od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej. Do opisu toru ruchu przyjmiemy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2{,}50$ m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek kołowej obręczy kosza. Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



Zadanie 22.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza znajduje się na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do 0,01 m)

A. 3,04 m **B.** 3,06 m **C.** 3,80 m **D.** 4,93 m

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

II Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 22.2. (0–2)

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

II Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:

10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku 4,93 m.

1 pkt – zastosowanie wzoru na wierzchołek paraboli oraz prawidłowe podstawienie wszystkich danych liczbowych do tego wzoru

LUB

– zapisanie wzoru funkcji w postaci $y = -0{,}174(x-p)^2 + q$ oraz zidentyfikowanie q jako współrzędnej wierzchołka paraboli lub wysokości maksymalnej rzutu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wysokość maksymalna, na jaką wzniesie się środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Skorzystamy z gotowego wzoru na wierzchołek paraboli (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$h_{max} = y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1{,}3^2 + 4\cdot 0{,}174\cdot 2{,}5}{4\cdot(-0{,}174)} = 4{,}928\ldots \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Sposób 2.

Wysokość maksymalna, na jaką wzniesie się środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Wartość tę możemy wyznaczyć przekształcając wzór funkcji kwadratowej $y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ do postaci kanonicznej:

$$y = -0{,}174(x-p)^2 + q$$

gdzie:

$$h_{max} = y_w = q$$

$$\begin{aligned} y &= -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5 = -0{,}174\left(x^2 + \frac{1{,}3}{0{,}174}x\right) + 2{,}5 = \\ &= -0{,}174\cdot\left[\left(x + \frac{1{,}3}{2\cdot 0{,}174}\right)^2 - \left(\frac{1{,}3}{2\cdot 0{,}174}\right)^2\right] + 2{,}5 = \\ &= -0{,}174\cdot\left(x + \frac{1{,}3}{2\cdot 0{,}174}\right)^2 + 0{,}174\cdot\left(\frac{1{,}3}{2\cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5 \end{aligned}$$

Zatem:

$$h_{max} = y_w = q = 0{,}174\cdot\left(\frac{1{,}3}{2\cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5 = 4{,}9281609\ldots \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Zadanie 22.3. (0–3)

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy $0{,}12$ m.

Oblicz współrzędną x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

II Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

Wymaganie szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia współrzędnej x oraz zapisanie wyniku $8{,}99$ m.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$.

1 pkt – zapisanie równania $0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ lub dwóch równań:
$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ i $y = 0{,}12$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że w momencie gdy piłka upadła i dotknęła parkietu, to punkt środka piłki należy do paraboli oraz znajduje się na wysokości $0{,}12$ m ponad parkietem. Zatem współrzędne środka piłki (x, y) spełniają równanie paraboli, a współrzędna $y = 0{,}12$ m. Zapiszemy układ równań i rozwiążemy go:

$$\begin{cases} y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5 \\ y = 0{,}12 \end{cases}$$

$$0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$
$$0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$$

Rozwiązaniami powyższego równania kwadratowego są liczby:

$$x_1 = \frac{1{,}3 - \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348} \qquad x_1 = \frac{1{,}3 + \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348}$$

$$x_1 \approx -1{,}52 \qquad x_2 \approx 8{,}99$$

Współrzędna x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu, jest równa w przybliżeniu 8,99 m.

Zadanie 23. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \end{cases} \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1.$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

I. Sprawność rachunkowa.

Wymaganie szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:
   2) Oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne obliczenie drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu ciągu (a_n) oraz ich sumy:
$S_4 = 36$.

1 pkt – poprawne obliczenie drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu ciągu (a_n):
$a_2 = 2,\ a_3 = 8,\ a_4 = 28$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczymy cztery kolejne wyrazy ciągu, stosując kolejno wzór rekurencyjny:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \cdot a_1 + 4 = 1 \cdot (-2) + 4 = 2 \\ a_3 = 2 \cdot a_2 + 4 = 2 \cdot 2 + 4 = 8 \\ a_4 = 3 \cdot a_3 + 4 = 3 \cdot 8 + 4 = 28 \end{cases}$$

Obliczymy sumę czterech kolejnych początkowych wyrazów:

$$S_4 = -2 + 2 + 8 + 28 = 36$$

Zadanie 24. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym: $a_n = 4n - 9$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:
   4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
   7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych […] do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania uzasadniającego, że ciąg jest arytmetyczny, np. prawidłowe obliczenie różnicy kolejnych wyrazów oraz wykazanie, że jest stała i nie zależy od n (sposób 1.)

LUB

– przeprowadzenie pełnego rozumowania uzasadniającego, że ciąg jest arytmetyczny, np. powołanie się na własność trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz sprawdzenie tej własności (sposób 1.).

1 pkt – zapisanie różnicy dwóch kolejnych wyrazów:
$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 9 - (4n - 9)$ (sposób 1.)
LUB
– zapisanie związku między trzema kolejnymi wyrazami ciągu:
$a_{n+1} = \frac{4n-9+4n-1}{2}$ dla każdego $n \geq 1$ (sposób 2.).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Żeby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1} - a_n$ jest stała i nie zależy od n. Wyznaczymy wzór ogólny na $n+1$ wyraz ciągu:

$$a_{n+1} = 4(n+1) - 9 = 4n + 4 - 9 = 4n - 5 \quad \text{dla} \quad n \geq 1$$

Obliczymy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 5 - (4n - 9) = 4n - 5 - 4n + 9 = 4 \quad \text{dla każdego } n \geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 4$.

Sposób 2.

Żeby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że dla dowolnych kolejnych trzech wyrazów ciągu a_n, a_{n+1}, a_{n+2} zachodzi związek: $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ dla $n \geq 1$. Wyznaczymy wzór ogólny na $n+1$ oraz $n+2$ wyraz ciągu:

$$a_{n+1} = 4(n+1) - 9 = 4n + 4 - 9 = 4n - 5 \quad \text{dla} \quad n \geq 1$$

$$a_{n+2} = 4(n+2) - 9 = 4n + 8 - 9 = 4n - 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 1$$

Sprawdzamy, czy dla kolejnych trzech wyrazów ciągu (a_n) zachodzi związek:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

Prawą stronę równania wyrazimy poprzez n:

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{4n - 9 + 4n - 1}{2} = \frac{8n - 10}{2} = 4n - 5 \quad \text{dla każdego } n \geq 1$$

Po uwzględnieniu faktu, że: $a_{n+1} = 4n - 5$, otrzymujemy równość:

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = a_{n+1}$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 25. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	**1.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną.
B.	malejący,		**2.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero.
C.	stały,		**3.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

VI. Ciągi. Zdający:
1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A3

Komentarz

Zbadamy, jaki znak ma różnica: $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$$

Ponieważ $n \geq 1$ to $2n > 0$, zatem:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \text{ każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Zadanie 26. (0–2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Oblicz wartość m, dla której liczby $f(m)$, $f(1)$, $f(2)$ są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

V. Funkcje. Zdający:
   2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

VI. Ciągi. Zdający:
   4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
   7) wykorzystuje własności ciągów, w tym […] geometrycznych do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz podanie prawidłowego wyniku: $m = \frac{1}{2}$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie wartości funkcji f: $f(m) = \frac{1}{m}$, $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$ oraz wykorzystanie definicji albo własności ciągu geometrycznego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wyznaczymy kolejne wyrazy ciągu:

$$f(m) = \frac{1}{m}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

Zastosujemy własność/definicję ciągu geometrycznego:

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{f(1)}{f(m)} = q \qquad \text{skąd otrzymujemy} \qquad \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{\frac{1}{m}}$$

Zatem:

$$\frac{1}{2m} = 1 \qquad \text{czyli} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Sposób 2.

Wyznaczymy kolejne wyrazy ciągu:

$$f(m) = \frac{1}{m}, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

Zastosujemy własność ciągu geometrycznego:

$$1^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$\frac{1}{2m} = 1 \qquad \text{czyli} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Sposób 3.

Wyznaczymy kolejne wyrazy ciągu:

$$a_1 = f(m) = \frac{1}{m}, \qquad a_2 = f(1) = 1, \qquad a_3 = f(2) = \frac{1}{2}$$

Zastosujemy wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dla $n \geq 1$, albo wzór rekurencyjny określający ciąg geometryczny: $a_{n+1} = a_n q$ dla $n \geq 1$ i liczby rzeczywistej q.

Wówczas:

$$a_3 = a_2 q \qquad \text{stąd} \qquad \frac{1}{2} = 1 \cdot q \qquad \text{zatem} \qquad q = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_1 q^2 \qquad \text{stąd} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{m} \cdot q^2 \qquad \text{zatem} \qquad |q| = \sqrt{\frac{m}{2}}$$

Z powyższych zależności wynika, że:

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \qquad \text{stąd} \qquad \frac{1}{4} = \frac{m}{2} \qquad \text{zatem} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Zadanie 27.

Czas T połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę – tzn. połowa jąder danego izotopu przemienia się w inne jądra. Liczba jąder $N(t)$ izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie t, licząc od chwili $t_0 = 0$, wyraża się zależnością wykładniczą:

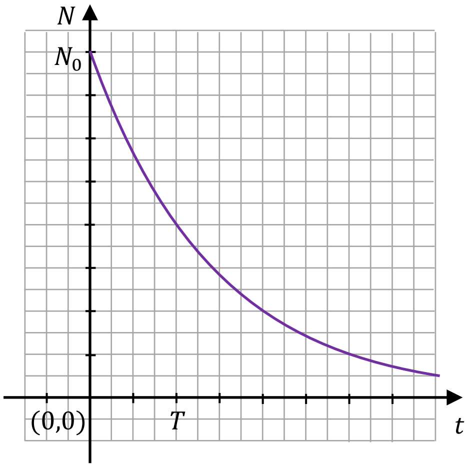
$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie N_0 jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej $t_0 = 0$.

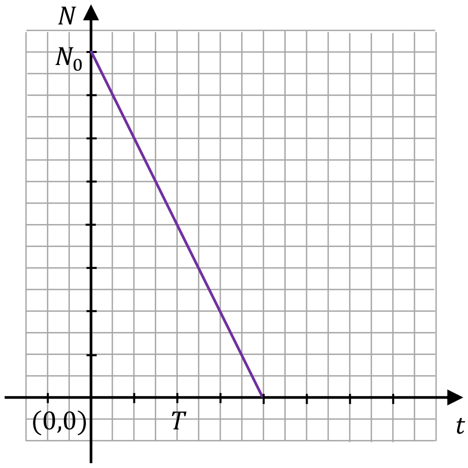
Zadanie 27.1. (0–1)

Na poniższych rysunkach 1.–4. przedstawiono wykresy różnych zależności.

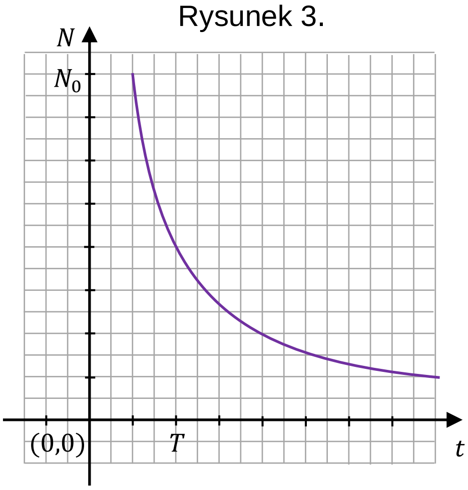
Rysunek 1.



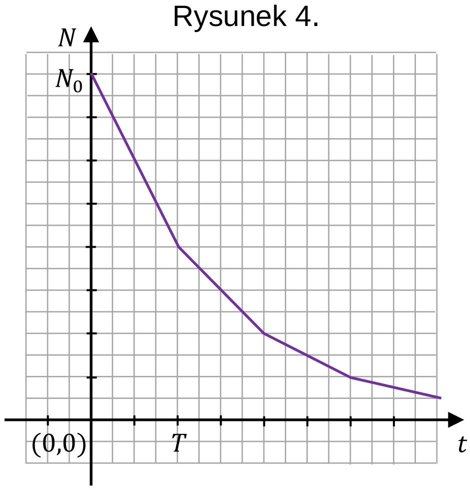
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres zależności wykładniczej $N(t)$ – opisanej we wstępie do zadania – przedstawiono na

A. rysunku 1. **B.** rysunku 2. **C.** rysunku 3. **D.** rysunku 4.

Wymaganie ogólne
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów […].

Wymaganie szczegółowe
V. Funkcje. Zdający:
   14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 27.2. (0–3)

Czas połowicznego rozpadu węgla $^{14}\mathrm{C}$ to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w pewnym organicznym znalezisku archeologicznym stanowi $\frac{1}{16}$ masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.

Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.

Wymagania ogólne
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów […].

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
   1) wykonuje działania ([…] mnożenie, dzielenie, potęgowanie, […]) w zbiorze liczb rzeczywistych.

V. Funkcje. Zdający:
   14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania
dla rozwiązania sposobem 1.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia t oraz podanie prawidłowego wyniku: $t = 22\,800$ lat.

2 pkt – zapisanie równania: $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ oraz wyznaczenie z niego $\frac{t}{T} = 4$.

1 pkt – poprawne zapisanie równania: $\frac{1}{16}m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania
dla rozwiązania sposobem 2.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile lat ma znalezisko archeologiczne oraz podanie prawidłowego wyniku: $22\,800$ lat.

2 pkt – zapisanie związku między masą izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ jaka utrzymywała się za życia organizmu a masą tego izotopu w znalezisku:
$m_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m_0 = \frac{1}{16}\cdot m_0$.

1 pkt – poprawne zapisanie masy izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ po 5700 latach (po czasie połowicznego rozpadu): $m_1 = \frac{1}{2}\cdot m_0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wykorzystamy wzór podany we wstępie do zadania, opisujący rozpad promieniotwórczy, zastosowany do masy izotopu:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Podstawimy dane z zadania i przekształcimy równanie:

$$\frac{1}{16}m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \qquad \text{czyli} \qquad \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Zgodnie z definicją funkcji wykładniczej, powyższa równość oznacza, że liczba $\frac{1}{2}$ podniesiona do potęgi $\frac{t}{T}$ musi dać w wyniku $\frac{1}{16}$. Zatem:

$$\frac{t}{T} = 4$$

Obliczymy, ile lat liczy sobie znalezisko. Z powyższego równania wynika, że:

$$t = 4T = 4 \cdot 5700 = 22\,800 \text{ lat}$$

Sposób 2.

Przyjmijmy, że:

m_0 – masa początkowa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$.

Zgodnie z definicją pojęcia czasu połowicznego rozpadu, po każdym upływie czasu równym czasowi połowicznego rozpadu, masa izotopu promieniotwórczego w próbce zmniejsza się o połowę. Zatem po każdym kolejnym upływie 5700 lat, masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce/znalezisku będzie się zmniejszała o połowę.

Zatem:

$m_1 = \frac{1}{2} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce po 5700 latach.

$m_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_0 = \frac{1}{4} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce po 11400 latach.

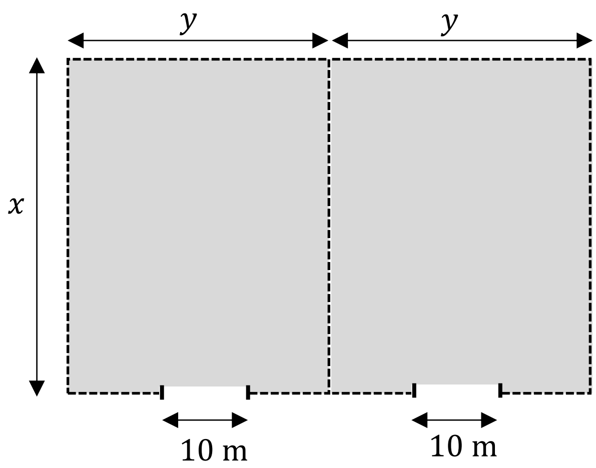
$m_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_0 = \frac{1}{8} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce po 17100 latach.

$m_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_0 = \frac{1}{16} \cdot m_0$ – masa izotopu węgla $^{14}\mathrm{C}$ w próbce 22800 latach.

Znalezisko archeologiczne ma 22800 lat.

Zadanie 28. (0–4)

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymaganie szczegółowe

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.
Zdający rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia obu wymiarów działki oraz podanie prawidłowych wyników: $x = 100$ m oraz $y = 75$ m.
3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole działki w zależności od jednej zmiennej oraz prawidłowe obliczenie współrzędnej x wierzchołka paraboli: $x = 100$ m.
2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej w zależności od jednej zmiennej:
$P(x) = 2x(150 - \frac{3}{4}x)$ dla $x \in \left(0, \frac{560}{3}\right)$.
1 pkt – zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej: $P = x \cdot 2y$
LUB
– zapisanie związku między wymiarami działki: $3x + 4y - 20 = 580$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu. Całkowitą długość płotu – po uwzględnieniu warunków zadania – można zapisać równaniem:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$

Powyższe równanie określa związek między wymiarami x i y. Wymiar y jednej działki musi być większy od 10 m, ze względu na ustaloną szerokość bramy wjazdowej. W związku z tym, w modelu matematycznym uwzględniającym warunki zadania, wymiary x i y spełniają:

$$x > 0 \quad \text{i} \quad y > 10$$

Pole P całkowitej powierzchni magazynowej jest równe polu prostokąta o bokach długości x oraz $2y$. Zatem:

$$P = x \cdot 2y$$

Pole powierzchni magazynowej wyrazimy jako funkcję jednej zmiennej x. W tym celu najpierw wyznaczymy y:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$
$$4y = 600 - 3x$$
$$y = 150 - \frac{3}{4}x$$

Następnie podstawimy wyznaczone y do wzoru na pole $P = x \cdot 2y$:

$$P(x) = 2x\left(150 - \frac{3}{4}x\right)$$

Wyznaczymy dziedzinę funkcji P. Wykorzystamy związek między wymiarami x i y oraz wykorzystamy warunki, jakie te wymiary spełniają:

$$y = 150 - \frac{3}{4}x \quad \text{oraz} \quad y > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zatem:

$$150 - \frac{3}{4}x > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

$$x < \frac{560}{3} \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zmienna x może przyjmować wartości:

$$x \in \left(0, \frac{560}{3}\right)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli $\mathcal{P}$ skierowanej ramionami do dołu. Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$. Współrzędną x wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$ obliczymy z miejsc zerowych funkcji kwadratowej, która jest równaniem tej paraboli. Rozwiążemy zatem równanie:

$$2x\left(150 - \frac{3}{4}x\right) = 0$$

Z powyższego równania wynika, że:

$$2x = 0 \quad \text{lub} \quad 150 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{lub} \quad x_2 = 200$$

Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$, czyli dla:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 100 \text{ m}$$

Obliczymy drugi wymiar działki, dla którego pole powierzchni magazynowej jest największe:

$$y = 150 \text{ m} - \frac{3}{4} \cdot 100 \text{ m} = 75 \text{ m}$$

Całkowite pole powierzchni magazynowej jest największe dla działki o wymiarach:

$$x = 100 \text{ m} \quad \text{oraz} \quad y = 75 \text{ m}.$$

PLANIMETRIA, GEOMETRIA ANALITYCZNA, STEREOMETRIA

Zadanie 29. (0–1)

Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90° < \alpha < 180°$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\lvert\operatorname{tg}\alpha\rvert = \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:

1) Wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ […];
4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 30. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

Oblicz długość środkowej tego trójkąta, poprowadzonej z wierzchołka A.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
   5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów […];
   6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD oraz prawidłowe obliczenie długości środkowej: $|AD| = 4\sqrt{7}$.

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD:

$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$

LUB

$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60°$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

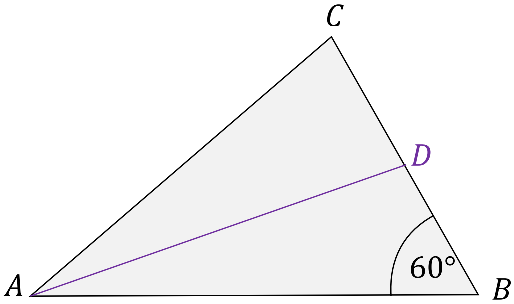
dla rozwiązania sposobem 2.

2 pkt – prawidłowe zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD oraz prawidłowe obliczenie długości środkowej $|AD| = 4\sqrt{7}$.

1 pkt – wyodrębnienie trójkąta prostokątnego AGD oraz trójkąta GBD o kątach: $30°$, $60°$, $90°$, łącznie z poprawnym określeniem długości jego boków: $|GB| = 2$, $|DG| = 2\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania



Sposób 1. (zastosowanie twierdzenia cosinusów)
Wykonamy rysunek pomocniczy (zobacz obok). Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$.

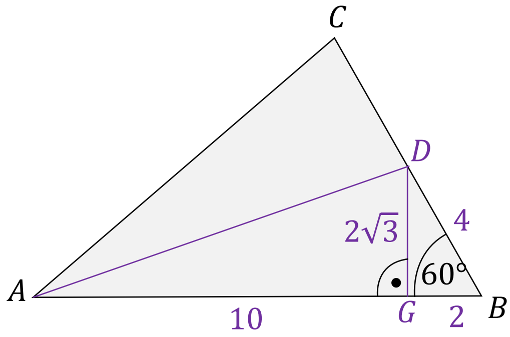
Do obliczenia długości środkowej $|AD|$ zastosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$$

$$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 112$$

$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Sposób 2. (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i własności trójkąta o kątach $30°$, $60°$, $90°$)
Wykonamy rysunek pomocniczy (zobacz obok).



W celu obliczenia długości środkowej AD zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AGD.

Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$. Rozważmy dalej trójkąt GBD. Trójkąt GBD ma kąty o miarach: $30°$, $60°$, $90°$, skąd wynika, że przyprostokątne tego trójkąta mają długości:

$$|GB| = 2 \qquad |DG| = 2\sqrt{3}$$

zatem długość przyprostokątnej AG trójkąta AGD jest równa:

$$|AG| = 12 - 2 = 10$$

Obliczymy długość środkowej AD z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD:

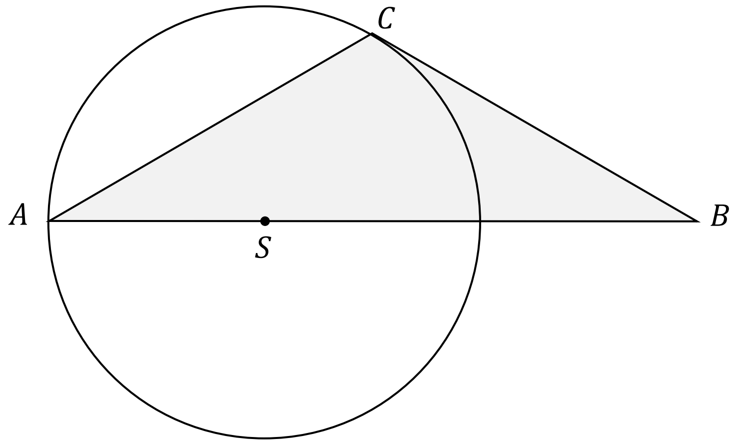
$$|AD|^2 = |AG|^2 + |GD|^2$$

$$|AD|^2 = 10^2 + (2\sqrt{3})^2 = 112$$

$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Zadanie 31. (0–4)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r. Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek poniżej). Długości boków AB i AC są równe odpowiednio $|AB| = 3r$ oraz $|AC| = \sqrt{3}r$.



Oblicz miary wszystkich kątów trójkąta ABC.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria. Zdający:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne obliczenie miar kątów trójkąta ABC:

$|\sphericalangle CAB| = 30°,\ |\sphericalangle ABC| = 30°,\quad |\sphericalangle BCA| = 120°$

3 pkt – poprawne obliczenie miar kątów w trójkącie DBC:

$|\sphericalangle CDB| = 120°,\ |\sphericalangle DBC| = 30°,\quad |\sphericalangle BCD| = 30°$

LUB

– poprawne prawidłowe obliczenie miar kątów w trójkącie ASC:

$|\sphericalangle ASC| = 120°,\ |\sphericalangle CAS| = 30°,\ |\sphericalangle SCA| = 30°$.

2 pkt – poprawne obliczenie miar pozostałych kątów trójkąta ADC:

$|\sphericalangle CAD| = 30°,\ |\sphericalangle ADC| = 60°$

LUB

– poprawne obliczenie miar pozostałych kątów trójkąta BSC:

$|\sphericalangle SBC| = 30°,\ |\sphericalangle CSB| = 60°$

1 pkt – zapisanie, że kąt $|\sphericalangle ACD| = 90°$

LUB

– zapisanie, że kąt $|\sphericalangle BCS| = 90°$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

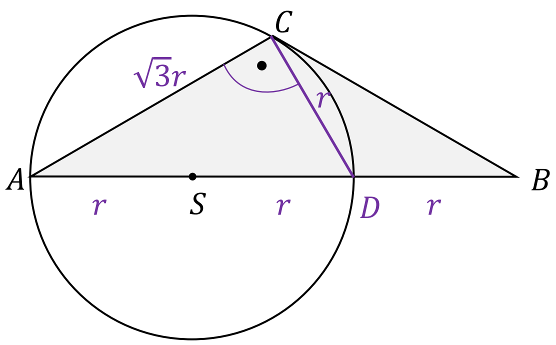
Sposób 1.

Przeanalizujemy zależności między odcinkami i kątami w przedstawionej sytuacji. Na poniższych rysunkach pomocniczych przedstawimy graficzną ilustrację kroków postępowania.

1. Kąt $\sphericalangle ACD$ jest kątem wpisanym opartym na średnicy, zatem $|\sphericalangle ACD| = 90°$, czyli trójkąt ADC jest prostokątny.
2. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości boku $|CD|$:

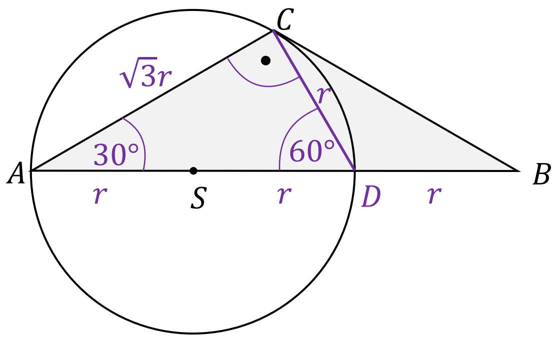
$|CD|^2 = |AD|^2 - |AC|^2$ stąd $|CD|^2 = (2r)^2 - \left(\sqrt{3}r\right)^2 = r^2$

$|CD| = r$



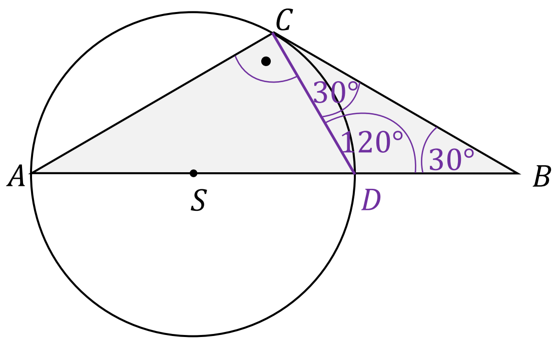
3. Trójkąt ADC o bokach $2r,\ r,\ \sqrt{3}r$ jest połową trójkąta równobocznego, zatem:

$|\sphericalangle CAD| = 30°$, $|\sphericalangle ADC| = 60°$



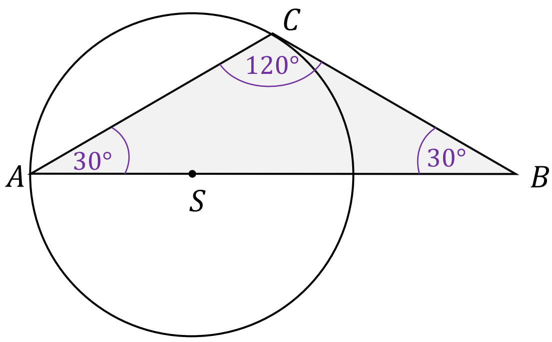
4. Zauważmy, że $|DB| = |DC| = r$, zatem trójkąt DBC jest równoramienny. Z tego i poprzedniego faktu wynika, że

$$|\sphericalangle CDB| = 180° - 60° = 120°, \qquad |\sphericalangle DBC| = 30°, \qquad |\sphericalangle BCD| = 30°$$



Z omówionych kroków 1.–4. wynika, że kąty w trójkącie ABC mają miary:

$$|\sphericalangle CAB| = 30°, \qquad |\sphericalangle ABC| = 30°, \qquad |\sphericalangle BCA| = 120°$$

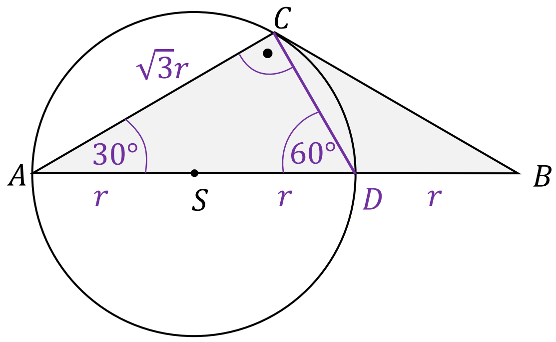


Sposób 2.

Przeanalizujemy zależności między odcinkami i kątami w przedstawionej sytuacji. Na poniższych rysunkach pomocniczych przedstawimy graficzną ilustrację kroków postępowania.

1. Kąt $\sphericalangle ACD$ jest kątem wpisanym opartym na średnicy, zatem $|\sphericalangle ACD| = 90°$.
2. Zauważmy, że: $\cos|\sphericalangle CAD| = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

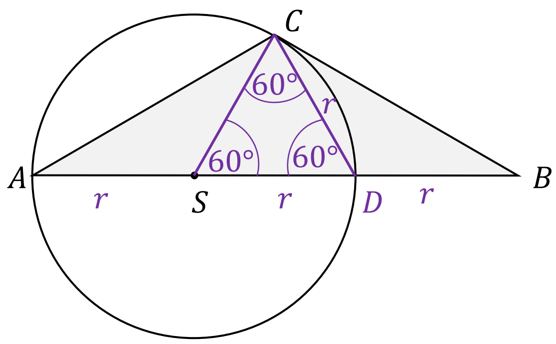
   Stąd wynika, że $|\sphericalangle CAD| = 30°$, zatem $|\sphericalangle ADC| = 60°$.



3. Zauważamy, że $|SC| = |SD| = r$, czyli trójkąt SDC jest równoramienny, zatem:

   $|\measuredangle DCS| = |\measuredangle SDC| = 60°$ Stąd wynika, że $|\measuredangle CSD| = 60°$.

   Z powyższego wynika, że trójkąt SDC jest równoboczny.

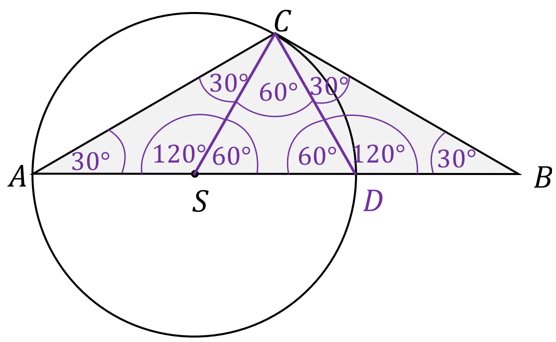


4. Zauważamy, że $|SA| = |SC| = r$, czyli trójkąt ASC jest równoramienny. Podobnie mamy $|DB| = |DC| = r$, zatem trójkąt DBC jest równoramienny. Z tych i poprzednich faktów wynika, że

$$|\measuredangle ASC| = 180° - 60° = 120°, \qquad |\measuredangle SAC| = 30°, \qquad |\measuredangle SCA| = 30°$$

oraz

$$|\measuredangle CDB| = 180° - 60° = 120°, \qquad |\measuredangle DBC| = 30°, \qquad |\measuredangle BCD| = 30°$$

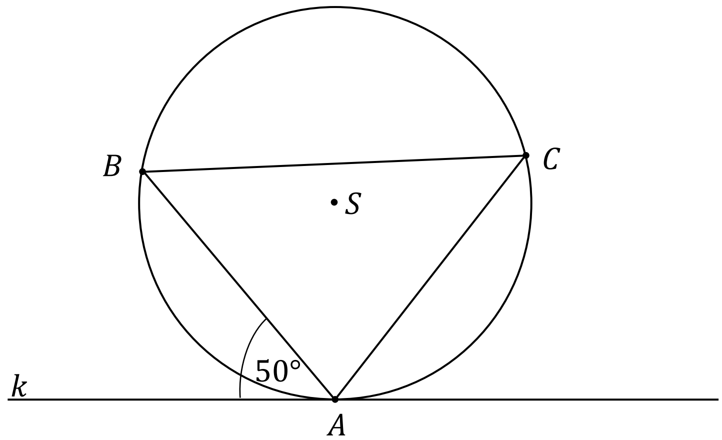


Z omówionych kroków 1.–4. wynika, że kąty w trójkącie ABC mają miary:

$$|\measuredangle CAB| = 30°, \qquad |\measuredangle ABC| = 30°, \qquad |\measuredangle BCA| = 120°$$

Zadanie 32. (0–1)

Dane są okrąg o środku S oraz prosta k styczna do okręgu w punkcie A. Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu. Miara kąta ostrego pomiędzy prostą k a cięciwą AB jest równa $50°$. Punkt C leży na okręgu. Kąt $\sphericalangle BCA$ jest ostry. Sytuację przedstawia rysunek poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta $\sphericalangle BCA$ jest równa

A. $100°$ **B.** $80°$ **C.** $50°$ **D.** $40°$

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:
7) stosuje twierdzenia […] o kącie między styczną a cięciwą.
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania

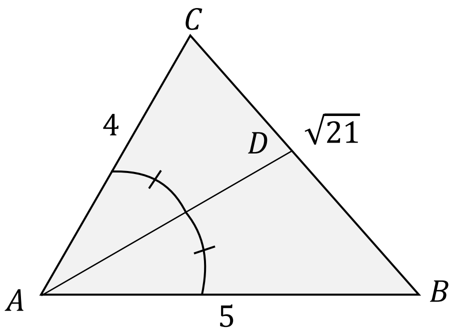
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 33. (0–1)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 5$, $|BC| = \sqrt{21}$, $|AC| = 4$. Dwusieczna kąta $\sphericalangle CAB$ przecina bok BC w punkcie D (zobacz rysunek poniżej).



Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Długość odcinka BD jest równa

A.	$\lvert BD\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{21}$,		**1.**	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert} = \frac{\lvert BC\rvert}{\lvert BD\rvert}$
B.	$\lvert BD\rvert = \frac{5}{9}\sqrt{21}$,	ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że	**2.**	$\lvert BD\rvert = \lvert DC\rvert$
C.	$\lvert BD\rvert = \frac{4}{5}\sqrt{21}$,		**3.**	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert} = \frac{\lvert BD\rvert}{\lvert DC\rvert}$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:
   7) stosuje twierdzenia […] o dwusiecznej kąta.

Zasady oceniania

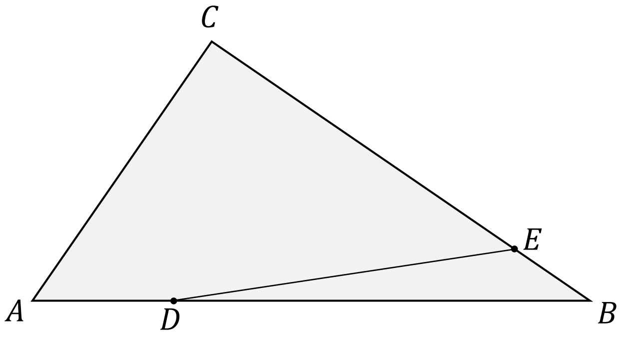
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B3

Zadanie 34. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta wybrano punkt D, taki, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku BC wybrano taki punkt E, że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$ (zobacz rysunek poniżej). Pole trójkąta ABC jest równe 20.



Oblicz pole trójkąta DBE.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
5) stosuje […] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

VIII. Planimetria. Zdający:
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
dla rozwiązania sposobem 1.
3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DBE oraz podanie wyniku: $P_{DBE} = 3$.
2 pkt – wykazanie oraz zapisanie, że

$$\frac{P_{DBE}}{P_{ABE}} = \frac{3}{4} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{P_{ABE}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$$

1 pkt – wykazanie i zapisanie, że stosunek pól trójkątów ABE i DBE jest równy stosunkowi długości ich podstaw DB i AB:

$$\frac{P_{DBE}}{P_{ABE}} = \frac{3}{4}$$

LUB

– wykazanie i zapisanie, że stosunek pól trójkątów ABE i ABC jest równy stosunkowi długości ich podstaw BE i BC:

$$\frac{P_{ABE}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania
dla rozwiązania sposobem 2.
3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DBE oraz podanie wyniku: $P_{DBE} = 3$.
2 pkt – wyprowadzenie i zapisanie zależności $|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = 40$ oraz wzoru na pole trójkąta DBE: $P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot |AB|\right) \cdot \left(\frac{1}{5}|BC|\right) \cdot \sin\beta$.
1 pkt – zastosowanie wzoru na pole trójkąta ABC z sinusem kąta $\measuredangle ABC$ oraz wyprowadzenie zależności $|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = 40$

LUB

– zastosowanie wzoru na pole trójkąta DBE z sinusem kąta $\measuredangle DBE$ oraz zapisanie / zastosowanie związków $|DB| = \frac{3}{4}|AB|$ oraz $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania
dla rozwiązania sposobem 3.
3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DBE oraz podanie wyniku: $P_{DBE} = 3$.
2 pkt – zapisanie zależności $|AB| \cdot h_C = 40$ oraz wzoru na pole trójkąta: $P_{DBE} = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot h_E$ (lub równoważnego) oraz zapisanie zależności: $\frac{h_E}{h_C} = \frac{1}{5}$ wynikającej z podobieństwa trójkątów C_1BC oraz E_1BE.
1 pkt – zastosowanie wzoru na pole trójkąta ABC z wysokością h_C oraz wyprowadzenie zależności $|AB| \cdot h_C = 40$

LUB

– zastosowanie wzoru na pole trójkąta DBE z wysokością h_E oraz zapisanie / zastosowanie związku $|DB| = \frac{3}{4}|AB|$.

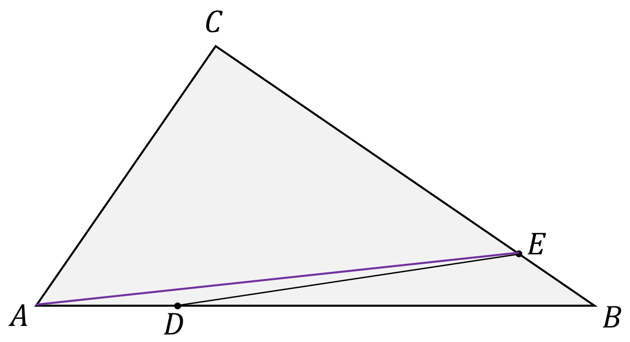
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Skorzystamy ze związków:

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{5}$$



1. Zauważmy, że trójkąty ABE i DBE mają wspólny wierzchołek E, a ich podstawy DB i AB leżą na jednaj prostej. Zatem oba trójkąty mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka E. Więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości ich podstaw DB i AB.

$$\frac{P_{DBE}}{P_{ABE}} = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{3}{4}$$

2. Trójkąty ABE i ABC mają wspólny wierzchołek A, a ich podstawy BE i BC leżą na jednaj prostej. Zatem oba trójkąty mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka A. Więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości ich podstaw BE i BC.

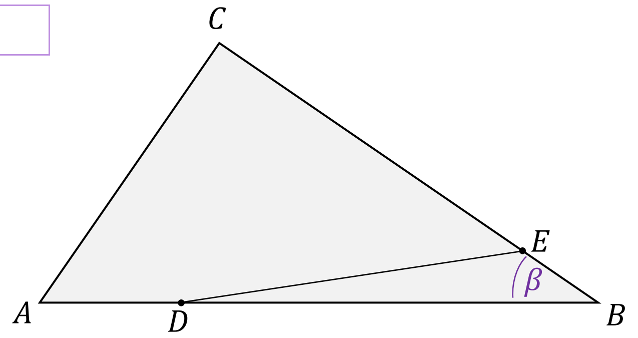
$$\frac{P_{ABE}}{P_{ABC}} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{5}$$

3. Z punktów 1. i 2. Otrzymujemy:

$$P_{DBE} = \frac{3}{4}P_{ABE} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot P_{ABC} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot 20 = 3$$

Sposób 2.

Oznaczmy miarę kąta $\sphericalangle DBE = \sphericalangle ABC$ jako β.



1. Zapiszemy wzór na pole trójkąta ABC i wykorzystamy dane zadania:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta$$

$$20 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta \qquad \text{stąd} \qquad |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = 40$$

2. Zapiszemy wzór na pole trójkąta DBE i wykorzystamy warunek zadania:

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |BE| \cdot \sin\beta$$

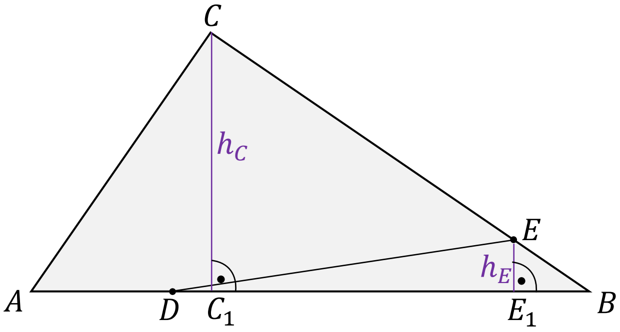
$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot |AB|\right) \cdot \left(\frac{1}{5}|BC|\right) \cdot \sin\beta \qquad \text{stąd} \qquad P_{DBE} = \frac{3}{40} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta$$

3. Do otrzymanego wzoru na pole trójkąta DBE podstawimy wynik z punktu 1:

$$P_{DBE} = \frac{3}{40} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta = \frac{3}{40} \cdot 40 = 3$$

Sposób 3.

Wysokości trójkątów ABC i DBE opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków C i E oznaczymy jako h_C, h_E.



1. Zapiszemy wzór na pole trójkąta ABC i wykorzystamy dane zadania:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C$$

$$20 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C \quad \text{stąd} \quad |AB| \cdot h_C = 40$$

2. Zapiszemy wzór na pole trójkąta DBE i wykorzystamy warunek zadania:

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot h_E$$

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot |AB|\right) \cdot h_E \quad \text{stąd} \quad P_{DBE} = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot h_E$$

3. Trójkąty C_1BC oraz E_1BE są podobne (na podstawie cechy: kąt, kąt, kąt), zatem:

$$\frac{|EE_1|}{|CC_1|} = \frac{|BE|}{|BC|} \quad \text{stąd} \quad \frac{h_E}{h_C} = \frac{1}{5}$$

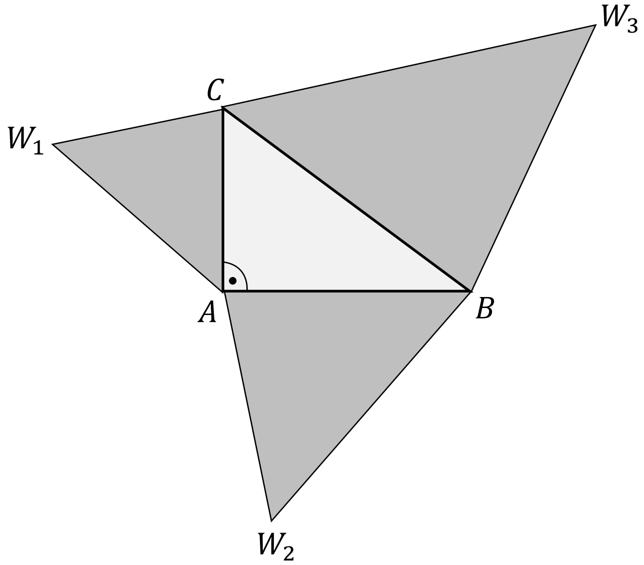
4. Do otrzymanego wzoru na pole trójkąta DBE (punkt 2.) podstawimy wynik z punktu 1. i wynik z punktu 3.:

$$P_{DBE} = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot h_E = \frac{3}{8} \cdot |AB| \cdot \frac{h_C}{5} = \frac{3}{40} \cdot |AB| \cdot h_C = \frac{3}{40} \cdot 40 = 3$$

Zadanie 35. (0–3)

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech każdy z boków tego trójkąta: CA, AB, BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio: CAW_1, ABW_2, CBW_3. Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1, W_2, W_3.



Pola trójkątów: CAW_1, ABW_2, CBW_3 oznaczymy odpowiednio jako P_1, P_2, P_3.

Udowodnij, że:

$$\boldsymbol{P_3 = P_1 + P_2}$$

Wymagania ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

VIII. [Szkoła podstawowa] Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Zdający:
8) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa […].

VIII. Planimetria. Zdający:
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowe przeprowadzenie pełnego dowodu równania: $P_3 = P_1 + P_2$.

2 pkt – zapisanie sumy pól trójkątów CAW_1, ABW_2 wyrażonej poprzez wysokość jednego z nich: $P_1 + P_2 = \frac{1}{2}h_1|AC| + \frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|AC|}$ oraz zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC: $|CA|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$

– zapisanie zależności między polami figur płaskich a długościami odcinków trójkąta: $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{|AB|}{|CA|}\right)^2 \quad \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{|BC|}{|CA|}\right)^2$, zapisanie sumy pól figur płaskich wyrażonej za pomocą długości boków trójkąta i jednego z pól: $P_1 + P_2 = P_1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1$ oraz zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC: $|CA|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$

LUB

– prawidłowe wyprowadzenie i zapisanie wyrażenia postaci: $P_1 + P_2 = P_1 \cdot \frac{|BC|^2}{|CA|^2}$.

1 pkt – zapisanie wzorów na pola trójkątów oraz wyrażenie wysokości dwóch trójkątów (na mocy ich podobieństwa) poprzez wysokość trzeciego z nich, np.:

$$P_1 = \frac{1}{2}h_1|AC| \qquad P_2 = \frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|AC|} \qquad P_3 = \frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{|CB|^2}{|AC|}$$

– zapisanie zależności między polami figur płaskich a długościami odcinków trójkąta, np.: $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{|AB|}{|CA|}\right)^2 \quad \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{|BC|}{|CA|}\right)^2$ lub zależności równoważnych

LUB

– zapisanie sumy pól figur płaskich wyrażonej za pomocą długości boków trójkąta oraz jednego z pól, np.: $P_1 + P_2 = P_1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1$ (lub równoważnie).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

1. Wysokości trzech trójkątów: CAW_1, ABW_2, CBW_3, opuszczone z wierzchołków W_1, W_2, W_3 oznaczymy odpowiednio jako: h_1, h_2, h_3. Zapiszemy wzory na pola powierzchni tych trójkątów:

$$P_1 = \frac{1}{2}h_1|AC| \qquad P_2 = \frac{1}{2}h_2|AB| \qquad P_3 = \frac{1}{2}h_3|CB|$$

2. Zapiszemy związki wynikające z podobieństwa trójkątów:

$$\Delta CAW_1 \sim \Delta ABW_2 \quad \text{zatem} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{więc} \quad h_2 = h_1 \cdot \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$\Delta CAW_1 \sim \Delta CBW_3 \quad \text{zatem} \quad \frac{h_3}{h_1} = \frac{|CB|}{|AC|} \quad \text{więc} \quad h_3 = h_1 \cdot \frac{|CB|}{|AC|}$$

3. Ponownie zapiszemy wzory na pola trójkątów, wykorzystując powyższe zależności:

$$P_1 = \frac{1}{2}h_1|AC| \qquad P_2 = \frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|AC|} \qquad P_3 = \frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{|CB|^2}{|AC|}$$

4. Obliczymy sumę $P_1 + P_2$.

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}h_1|AC| + \frac{1}{2}h_1 \cdot \frac{|AB|^2}{|AC|} = \frac{1}{2}h_1\left(|AC| + \frac{|AB|^2}{|AC|}\right)$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}h_1\left(\frac{|AC|^2 + |AB|^2}{|AC|}\right)$$

5. Wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABC:

Ponieważ

$$|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

to

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}h_1\left(\frac{|BC|^2}{|AC|}\right)$$

6. Prawa strona powyższego równania, na mocy pkt 3., jest równa P_3:

$$P_1 + P_2 = P_3$$

To kończy dowód.

Sposób 2.

1. Wykorzystamy zależności między obwodami a polami figur płaskich podobnych:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{O_2}{O_1}\right)^2 \qquad \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{O_3}{O_1}\right)^2$$

2. Wykorzystamy fakt, że stosunki obwodów trójkątów podobnych są równe stosunkom długości podstaw tych trójkątów:

$$\frac{O_2}{O_1} = \frac{|AB|}{|CA|} \qquad \frac{O_3}{O_1} = \frac{|BC|}{|CA|}$$

3. Z zależności 1. i 2. wynika:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{|AB|}{|CA|}\right)^2 \qquad \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{|BC|}{|CA|}\right)^2$$

$$P_2 = \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1 \qquad P_3 = \frac{|BC|^2}{|CA|^2} \cdot P_1$$

4. Obliczymy sumę $P_1 + P_2$:

$$P_1 + P_2 = P_1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2} \cdot P_1 = P_1 \cdot \left(1 + \frac{|AB|^2}{|CA|^2}\right)$$

$$P_1 + P_2 = P_1 \cdot \frac{|CA|^2 + |AB|^2}{|CA|^2}$$

5. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:

$$|CA|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

Zatem równanie w drugim wierszu pkt 4. można zapisać w postaci:

$$P_1 + P_2 = P_1 \cdot \frac{|BC|^2}{|CA|^2}$$

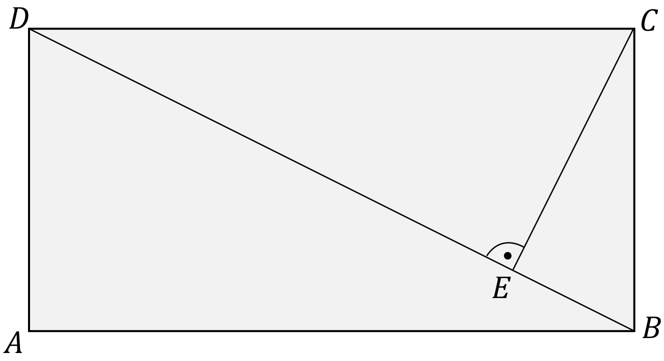
Prawa strona powyższego równania, na mocy pkt 3., jest równa P_3:

$$P_1 + P_2 = P_3$$

To kończy dowód.

Zadanie 36. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 2$. Kąt BDA ma miarę α, taką, że $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadła do BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka $|CE|$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowa metoda obliczenia długości odcinka EC oraz podanie prawidłowego wyniku: $|EC| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ lub $|EC| = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

2 pkt – zapisanie zależności $\frac{|DA|}{|BD|} = \frac{|EC|}{|DC|}$ oraz prawidłowe obliczenie z twierdzenia Pitagorasa długości odcinka BD: $|BD| = 2\sqrt{5}$ (np. jak w sposobie 1. rozwiązania)
LUB

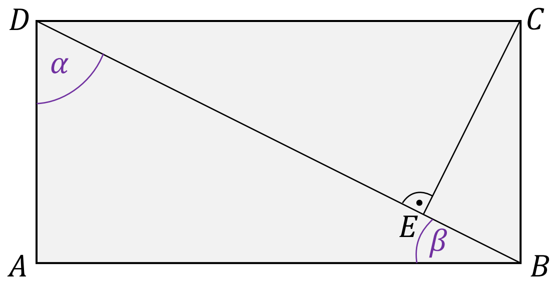
– zapisanie zależności $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|DE|}{|EC|} = 2$ oraz zapisanie równania z jedną niewiadomą wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEC (np. jak w sposobie 2. rozwiązania)
LUB
– zapisanie zależności $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|EB|} = 2$ oraz zapisanie równania z jedną niewiadomą wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCE
LUB
– zapisanie równania z jedną niewiadomą, wyrażającą długość boku EC, wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEC lub BCE.

1 pkt – stwierdzenie, że trójkąty ABD i DEC (lub trójkąty ABD i CEB) są podobne oraz zapisanie zależności $\frac{|AB|}{|AD|} = 2$ i obliczenie długości boku AB: $|AB| = 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

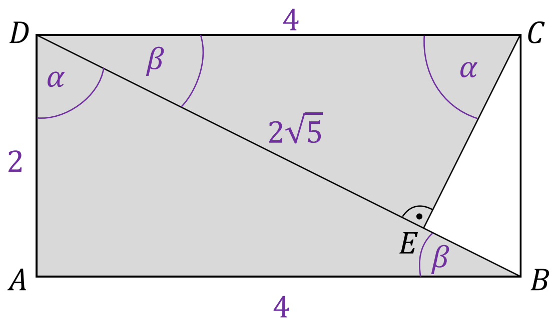
Sposób 1.



1. Wprowadzimy oznaczenia: $\measuredangle BDA = \alpha$, $\measuredangle ABD = \beta$. To są kąty w trójkącie prostokątnym ABD, zatem: $\alpha + \beta = 90°$

2. Wyodrębnimy trójkąty prostokątne: ABD, ECD. W tych trójkątach wyznaczymy kąty ostre. Skorzystamy z zależności, że $\alpha + \beta = 90°$ oraz z własności kątów naprzemianległych.

   Na podstawie cechy: kąt, kąt, kąt, stwierdzamy, że trójkąty ABD, ECD są podobne (zobacz rysunek obok).



3. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = 2$, to $|AB| = 4$. Zatem $|DC| = 4$.

4. Obliczymy $|BD|$ z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD:

$$|BD|^2 = |DA|^2 + |AB|^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

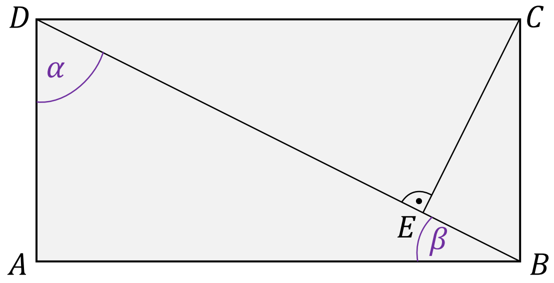
$$|BD| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

5. Z podobieństwa trójkątów ABD, ECD obliczymy długość odcinka EC.

$$\frac{|DA|}{|BD|} = \frac{|EC|}{|DC|} \qquad \text{zatem} \qquad \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{|EC|}{4} \qquad \text{więc} \qquad |EC| = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

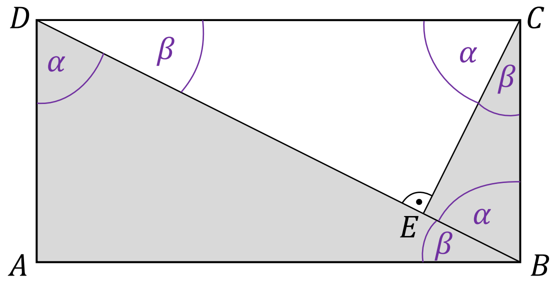
Sposób 2.

1. Zastosujemy oznaczenia: $\measuredangle BDA = \alpha$, $\measuredangle ABD = \beta$. To są kąty w trójkącie prostokątnym ABD, zatem: $\alpha + \beta = 90°$



2. Wyodrębnimy trójkąty prostokątne: ABD, BCE, ECD. W tych trójkątach wyznaczymy kąty ostre. Skorzystamy z zależności, że $\alpha + \beta = 90°$ oraz z własności kątów naprzemianległych.

   Na podstawie cechy: kąt, kąt, kąt, stwierdzamy, że trójkąty ABD, BCE, ECD są podobne.



3. Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|EB|} = \frac{|DE|}{|EC|}$$

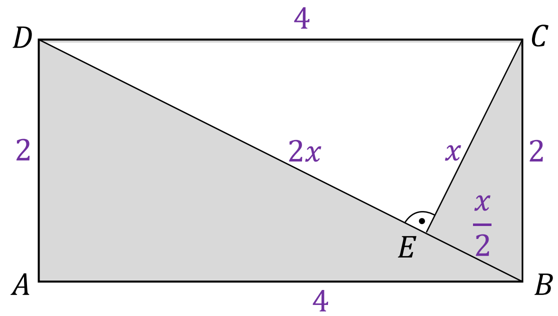
$$\text{zatem } \operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|EB|} = \frac{|DE|}{|EC|} = 2$$

   Wprowadzimy oznaczenie: $|EC| = x$. Długości boków EB i ED wyrazimy poprzez x. Z równań zapisanych powyżej otrzymujemy:

   ponieważ $|AD| = 2$ to $|AB| = 4$

   ponieważ $|EC| = x$ to $|EB| = \frac{x}{2}$

   ponieważ $|EC| = x$ to $|ED| = 2x$



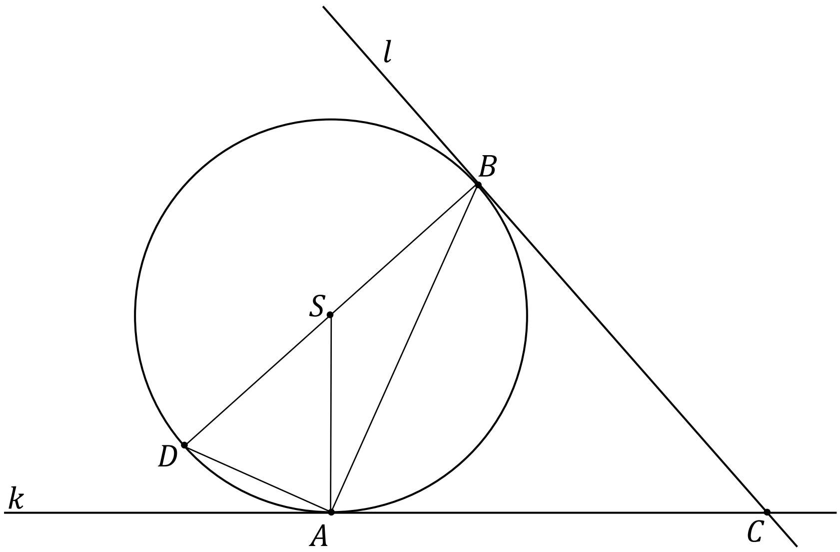
4. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ECD (można zastosować alternatywnie dla trójkąta BCE):

$$x^2 + (2x)^2 = 4^2 \quad \text{więc} \quad x^2 + 4x^2 = 16 \quad \text{stąd} \quad 5x^2 = 16$$

$$\text{Zatem } x = |EC| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Zadanie 37. (0–3)

Trzy różne punkty A, B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S. Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punkcie C (zobacz rysunek poniżej).



Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.

Wymagania ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
7) stosuje twierdzenia […] o kącie między styczną a cięciwą;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

(uwzględniające oba sposoby rozwiązania oraz ich kompilacje)

3 pkt – poprawne przeprowadzenie pełnego dowodu podobieństwa trójkątów ACB i ASD.

2 pkt – zapisanie związków pomiędzy kątami: $|\sphericalangle BSA| = 180° - |\sphericalangle ACB|$ oraz $|\sphericalangle ASD| = 180° - |\sphericalangle BSA|$ oraz zapisanie zależności wymienionych w kryterium za 1 pkt

LUB

– wykazanie, że $|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle ACB|$ oraz zapisanie zależności wymienionych w kryterium za 1 pkt

LUB

– wykazanie, że $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BAC|$ oraz zapisanie zależności wymienionych w kryterium za 1 pkt.

1 pkt – zapisanie, że trójkąt ACB jest równoramienny oraz zapisanie związku między jego kątami wewnętrznymi: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CBA| = (180° - |\sphericalangle ACB|): 2$

LUB

– zapisanie, że trójkąt ASD jest równoramienny oraz zapisanie związku między jego kątami wewnętrznymi: $|\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle DAS| = (180° - |\sphericalangle ASD|): 2$

LUB

– zapisanie, ze trójkąty ACB i ASD są równoramienne, oraz wskazanie / zapisanie równości odpowiednich ramion.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

1. Zauważmy, że trójkąt ACB jest równoramienny, gdzie: $|AC| = |CB|$.

Ta równość odcinków stycznych wynika z faktu, że trójkąty SCB i SCA są przystające na mocy cechy: kąt, bok (bok CS), kąt (promień okręgu w punkcie styczności jest prostopadły do stycznej, a środek S okręgu leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$).

2. Zauważmy, że trójkąt ASD jest równoramienny, gdzie: $|SD| = |SA|$ (odcinki SD i SA są promieniami okręgu).

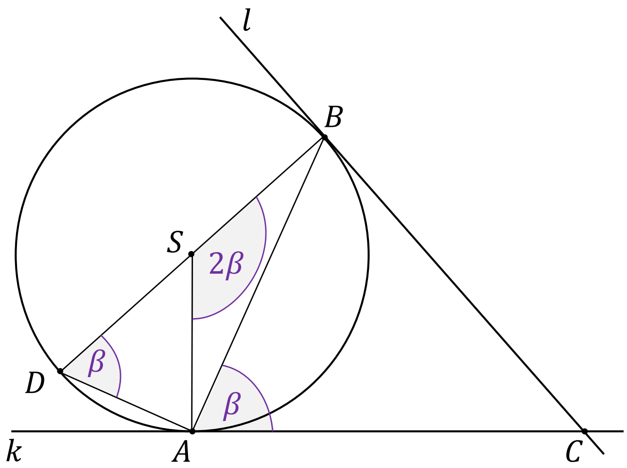
3. Sposób 1. kroku 3.

Oznaczymy $|\sphericalangle BAC| = \beta$. Na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą i kącie środkowym opartym na tym łuku co cięciwa, mamy:

$$|\sphericalangle BSA| = 2\beta.$$

Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym otrzymujemy:

$$|\sphericalangle BDA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BSA| = \beta$$



Sposób 2. kroku 3.

Oznaczymy $|\sphericalangle BAC| = \beta$. Na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą i kącie środkowym opartym na tym samym łuku co cięciwa, mamy:

$|\sphericalangle BSA| = 2\beta$. Zatem:

$$|\sphericalangle SDA| = \frac{180° - (180° - 2\beta)}{2} = \beta$$

Sposób 3. kroku 3.

Oznaczymy $|\sphericalangle BAC| = \beta$. Na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą (tw. o kącie dopisanym) i kącie wpisanym opartym na tym samym łuku co cięciwa, mamy:

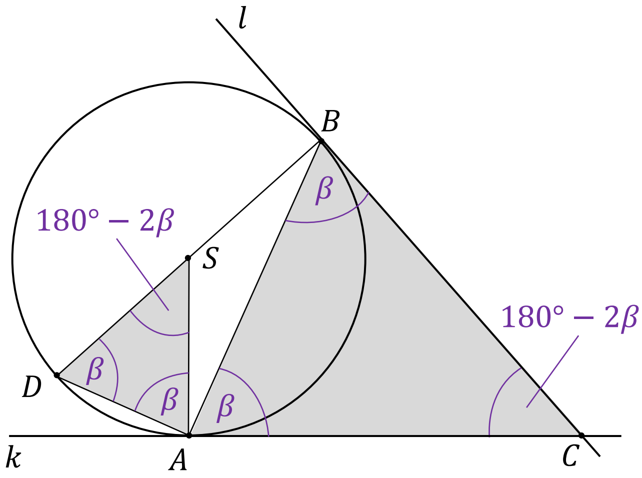
$|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BAC| = \beta$

4. Ponieważ trójkąty ACB oraz ASD są równoramienne (zobacz pkt 1. i pkt 2.), stąd wynika, że:

   $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAC| = \beta \qquad |\sphericalangle ACB| = 180° - 2\beta$

   $|\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle DAS| = \beta \qquad |\sphericalangle ASD| = 180° - 2\beta$

5. Trójkąty ACB i ASD są podobne na mocy cechy: kąt, kąt, kąt.



Sposób 2.

1. Zauważmy, że trójkąt ACB jest równoramienny, gdzie:

   $|AC| = |CB|$

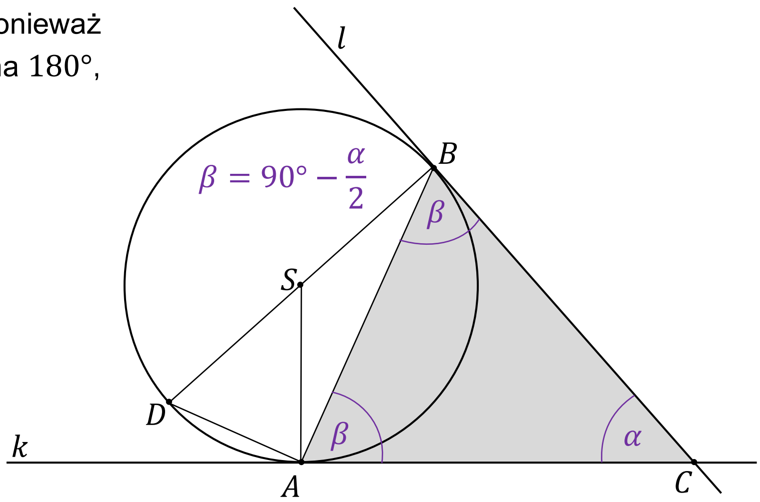
Powyższa równość odcinków stycznych wynika z faktu, że trójkąty SCB i SCA są przystające na mocy cechy: kąt, bok (CS), kąt (promień okręgu w punkcie styczności jest prostopadły do stycznej, a środek S okręgu leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$).

2. Miarę kąta $\sphericalangle ACB$ oznaczymy jako α. Ponieważ suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°, a trójkąt ACB jest równoramienny, to:

   $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CBA| = \beta$

   Zatem

   $$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$



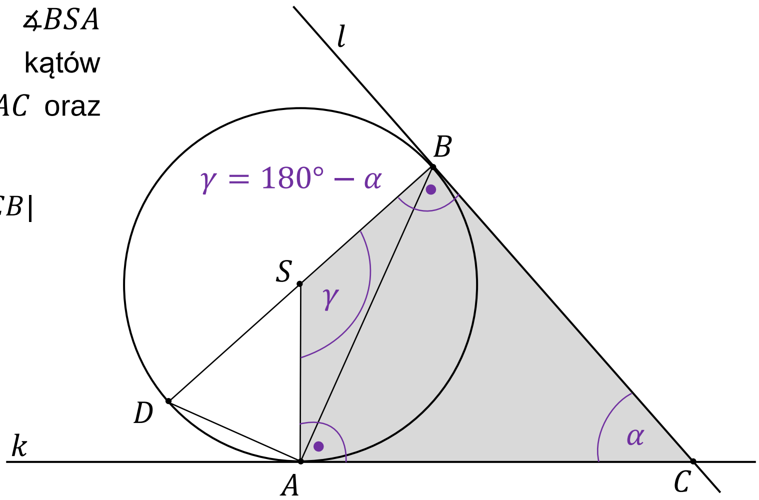
3. Rozważmy czworokąt $ACBS$. Miarę kąta $\measuredangle BSA$ oznaczymy przez γ. Ponieważ suma kątów w czworokącie jest równa $360°$, a kąty $\measuredangle SAC$ oraz $\measuredangle CBS$ są proste, to:

$$|\measuredangle BSA| = 360° - |\measuredangle SAC| - |\measuredangle CBS| - |\measuredangle ACB|$$

Zatem:

$$\gamma = 360° - 90° - 90° - \alpha$$

$$\gamma = 180° - \alpha$$

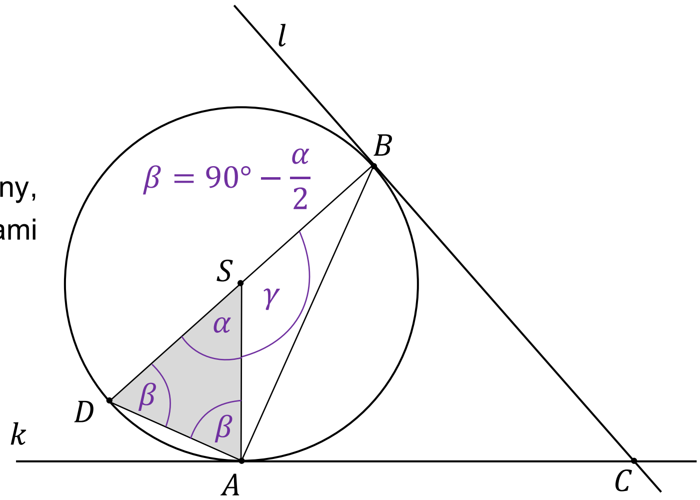


4. Kąt $\measuredangle ASD$ jest przyległy do kąta $\measuredangle BSA$, zatem:

$$|\measuredangle ASD| = 180° - \gamma$$
$$|\measuredangle ASD| = 180° - (180° - \alpha)$$
$$|\measuredangle ASD| = \alpha$$

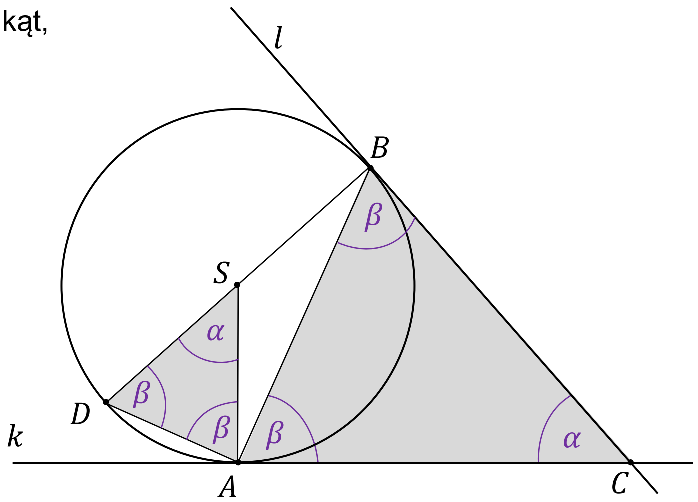
5. Zauważmy, że trójkąt ASD jest równoramienny, gdzie $|SD| = |SA|$ (odcinki SD i SA są promieniami okręgu). Zatem:

$$|\measuredangle SDA| = |\measuredangle DAS| = \frac{180° - |\measuredangle ASD|}{2}$$
$$|\measuredangle SDA| = |\measuredangle DAS| = 90° - \frac{\alpha}{2} = \beta$$



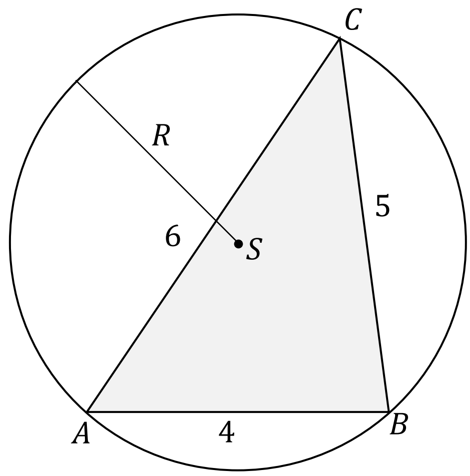
Uwaga! Miarę kąta $\measuredangle BDA$ (czyli β) można było wyrazić poprzez miarę kąta $\measuredangle BSA$ (czyli γ) na mocy twierdzenia o kącie środkowym opartym na tym samym łuku (tutaj łuku AB) co kąt wpisany: $\gamma = 2\beta$

6. Trójkąty ACB i ASD są podobne na mocy cechy: kąt, kąt, kąt.



Zadanie 38. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$. Na tym trójkącie opisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu R.



Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

VIII. Planimetria. Zdający:
1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie oraz podanie prawidłowego wyniku: $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$.

2 pkt – obliczenie sinusa jednego z kątów w trójkącie (np. $\measuredangle CAB$)
LUB
– obliczenie cosinusa jednego z kątów w trójkącie (np. $\measuredangle CAB$) oraz poprawne zapisanie dwóch równań wynikających z twierdzenia sinusów oraz „jedynki trygonometrycznej” dla jednego z kątów w trójkącie (tego samego).

1 pkt – obliczenie cosinusa jednego z kątów w trójkącie (np. $\measuredangle CAB$)
LUB
– poprawne zapisanie dwóch równań wynikających z twierdzenia cosinusów oraz twierdzenia sinusów dla jednego z kątów w trójkącie (tego samego, np. $\measuredangle CAB$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

W celu obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie zastosujemy twierdzenie sinusów oraz twierdzenie cosinusów. Z twierdzenia cosinusów wyznaczymy cosinus wybranego kąta w trójkącie, następnie dla tego kąta oraz boku naprzeciwko tego kąta zastosujemy twierdzenie sinusów.

1. Wprowadzimy oznaczenie: $|\measuredangle CAB| = \alpha$. Z twierdzenia cosinusów obliczymy $\cos\alpha$:

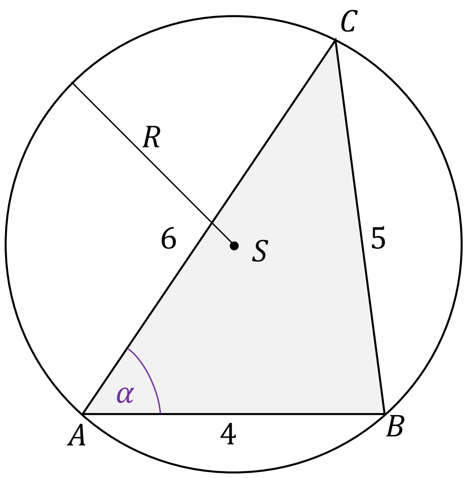
$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\cos\alpha$$

$$5^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos\alpha$$

$$25 = 36 + 16 - 48\cdot\cos\alpha$$

$$48\cdot\cos\alpha = 52 - 25$$

$$\cos\alpha = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$$



2. Z „jedynki trygonometrycznej” obliczymy $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{175}{16^2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{175}{16^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

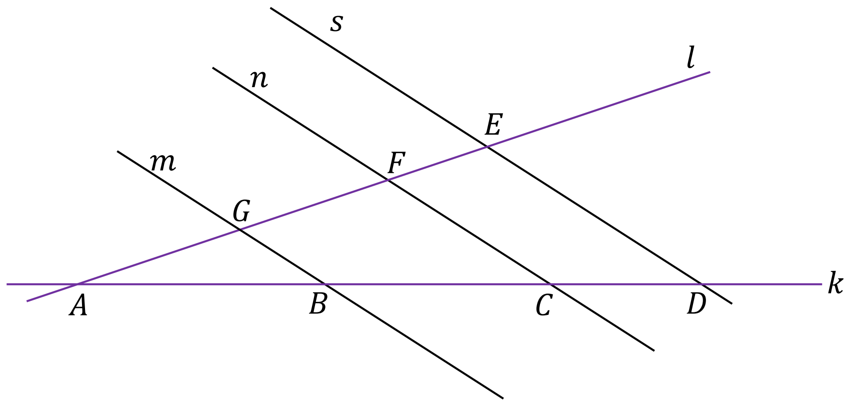
3. Zastosujemy twierdzenie sinusów do obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha} = 2R \quad \text{zatem} \quad R = \frac{5}{2\sin\alpha} = \frac{5}{2\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{8}} \quad \text{więc} \quad R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Zadanie 39. (0–1)

Proste k i l przecinają się w punkcie A. Proste m, n i s są do siebie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (zobacz rysunek poniżej), w taki sposób, że:

$$|BC| = 30, \qquad |CD| = 20, \quad |GF| = 21.$$



Oblicz długość odcinka FE.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

2) Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymaganie szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa […].

Zasady oceniania

1 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku $|FE| = 14$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zastosujemy twierdzenie Talesa:

$$\frac{|GF|}{|BC|} = \frac{|FE|}{|CD|} \qquad \text{stąd} \qquad \frac{21}{30} = \frac{|FE|}{20} \qquad \text{zatem} \qquad |FE| = 14$$

Zadanie 40.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest okrąg $\mathcal{O}$ określony równaniem:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Zadanie 40.1. (0–1)

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.

1. Środek S okręgu $\mathcal{O}$ ma współrzędne

A. $S = (2, -3)$
B. $S = (-2, -3)$
C. $S = (-2, 3)$
D. $S = (-2, 3)$

2. Promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy

E. $r = 16$
F. $r = 4$
G. $r = 5$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
   4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

AF

Zadanie 40.2. (0–2)

Oblicz współrzędne x punktów przecięcia okręgu $\mathcal{O}$ z osią Ox.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Zdający:
 7) […] rozwiązuje równania i nierówności typu $|x+4|=5$, $|x-2|<3$, $|x+3|>4$.

III. Równania i nierówności. Zdający:
 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
 4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
 6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zapisanie równania $(x-2)^2+(0+3)^2=16$ oraz prawidłowe rozwiązanie tego równania: $x_1=2+\sqrt{7}$ lub $x_2=2-\sqrt{7}$.

1 pkt – wykorzystanie informacji, że okrąg $\mathcal{O}$ przecina oś Ox i poprawne zapisanie równania $(x-2)^2+(0+3)^2=16$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiążemy układ dwóch równań, w którym jedno jest równaniem okręgu, a drugie jest równaniem osi Ox. Każdy punkt leżący na osi Ox ma współrzędne $(x,0)$, zatem $y=0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=16\\ y=0\end{cases}$$

$$(x-2)^2+(0+3)^2=16$$

$$(x-2)^2+9=16$$

$$(x-2)^2=7$$

$|x-2|=\sqrt{7}$

$x_1=2+\sqrt{7}$ lub $x_2=2-\sqrt{7}$

Zadanie 41.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y), dane są okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S=(3,-4)$ i prosta k o równaniu $2x-y-11=0$.

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k w punkcie P.

Zadanie 41.1. (0–2)

Wyznacz i zapisz równanie okręgu $\mathcal{O}$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
   4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
   5) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania

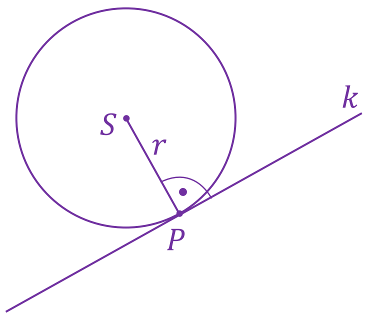
2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania okręgu oraz prawidłowe zapisanie równania okręgu: $(x-3)^2+(y+4)^2=\frac{1}{5}$.

1 pkt – poprawna metoda obliczenia promienia okręgu oraz zapisanie wyniku: $r=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rysunek poglądowy.



1. Zauważmy, że odległość punktu S od prostej k jest równa promieniowi okręgu $\mathcal{O}$. Zastosujemy wzór na odległość punktu od prostej i obliczymy promień okręgu:

$$r = d(S,k) = \frac{|2\cdot 3 - 1\cdot(-4) - 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2. Zapiszemy równanie okręgu:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{1}{5}$$

Zadanie 41.2. (0–2)

Oblicz współrzędne punktu P, w którym okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe
(uwzględniające różne metody rozwiązania)

IV. Układy równań. Zdający:
  1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi […];
  3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
  2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
  4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
  5) oblicza odległość punktu od prostej;
  6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu […].

Zasady oceniania
(dla rozwiązania sposobem 1.)

2 pkt – zapisanie układu złożonego z poprawnych równań prostych k i $k_\perp$ oraz prawidłowe rozwiązanie tego układu i zapisanie wyniku: $x=\frac{17}{5}$, $y=-\frac{21}{5}$.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt S oraz zapisanie równania prostej $k_\perp$: $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

LUB

– zapisanie równania prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt S, z poprawną wartością współczynnika kierunkowego tej prostej i błędną wartością wyrazu wolnego, oraz zapisanie układu złożonego z równań prostych k i $k_\perp$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania
(dla rozwiązania sposobem 2.)

2 pkt – zapisanie układu złożonego z równania prostej k i równania okręgu $\mathcal{O}$ oraz rozwiązanie tego układu równań i zapisanie wyniku: $x=\frac{17}{5}$, $y=-\frac{21}{5}$.

1 pkt – zapisanie układu równań, w którym jedno jest równaniem prostej k, a drugie jest równaniem okręgu $(x-3)^2+(y+4)^2=\frac{1}{5}$.

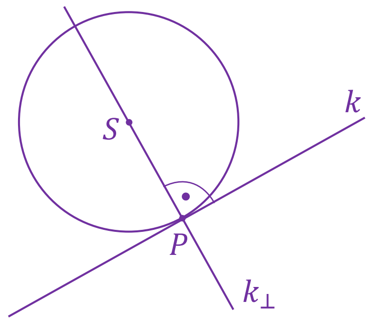
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
(rozwiązanie układu równań złożonego z równań prostych k i $k_\perp$)

1. Oznaczmy przez $k_\perp$ prostą prostopadłą do prostej k. Punkt styczności okręgu $\mathcal{O}$ i prostej k jest punktem przecięcia się prostej k z prostą $k_\perp$ prostopadłą do niej i przechodzącą przez środek tego okręgu. Należy rozwiązać układ równań złożony z równań obu tych prostych.

Rysunek poglądowy.



2. Wyznaczymy równanie prostej $k_\perp$– prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt S:

$$k: \quad y = 2x - 11$$

Prosta $k_\perp$ ma równanie:

$$k_\perp: \; y = -\frac{1}{2}x + b$$

Punkt $S = (3, -4)$ należy do prostej $k_\perp$, zatem: $-4 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ stąd $b = -\frac{5}{2}$, więc prosta $k_\perp$ ma równanie:

$$k_\perp: \; y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

3. Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 11 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 2x - 11$ stąd $-\frac{5}{2}x = -\frac{17}{2}$ więc $x = \frac{17}{5}$

$$y = 2x - 11 = 2 \cdot \frac{17}{5} - 11 = -\frac{21}{5}$$

$\begin{cases} x = \frac{17}{5} \\ y = -\frac{21}{5} \end{cases}$ zatem $P = \left(\frac{17}{5}, -\frac{21}{5}\right)$

Sposób 2.
(rozwiązanie układu równań złożonego z równania prostej k i równania okręgu $\mathcal{O}$)

Uwaga!
Sposób 1. rozwiązania zadania 41.2. jest niezależny od rozwiązania zadania 41.1. Natomiast sposób 2. pokazuje takie rozwiązanie zadania 41.2., w którym zdający może wykorzystać rozwiązanie zadania 41.1.

Współrzędne punktu styczności prostej k i okręgu $\mathcal{O}$ są rozwiązaniami układu równań, w którym jedno jest równaniem okręgu $\mathcal{O}$, a drugie jest równaniem prostej k. Zapiszemy i rozwiążemy ten układ równań. Wykorzystamy wyznaczone w zadaniu 41.1. równanie okręgu

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{1}{5} \\ y = 2x - 11 \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + (2x - 11 + 4)^2 = \frac{1}{5} \qquad \text{zatem} \qquad (x-3)^2 + (2x-7)^2 = \frac{1}{5}$$

$$x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 28x + 49 - \frac{1}{5} = 0$$

$$5x^2 - 34x + \frac{289}{5} = 0$$

$$x = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}$$

$$y = 2x - 11 = 2 \cdot \frac{17}{5} - 11 = -\frac{21}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{17}{5} \\ y = -\frac{21}{5} \end{cases} \qquad \text{więc} \qquad P = \left(\frac{17}{5}, -\frac{21}{5}\right)$$

Zadanie 42. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y), dane są punkty $A=(1,2)$ oraz $B=(3,7)$. Punkty A_O oraz B_O są odpowiednio obrazami punktów A i B w symetrii środkowej o środku w punkcie $O=(0,0)$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A_O i B_O jest równy

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $-\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $-\frac{2}{5}$

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:
2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w […] symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zasady oceniania

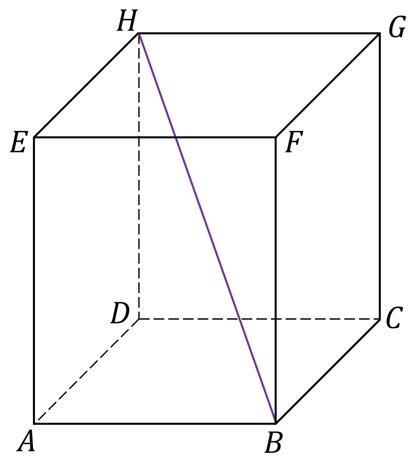
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 43.

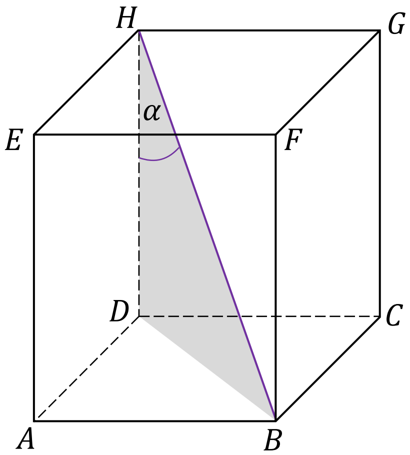
Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego postawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.



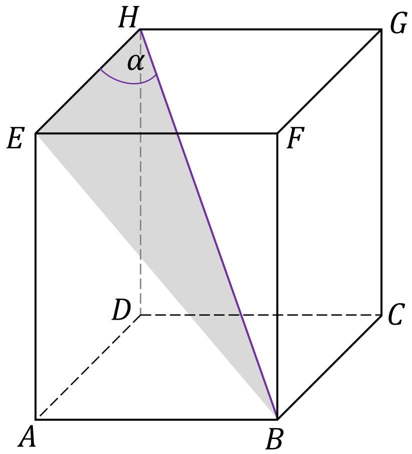
Zadanie 43.1. (0–1)

Na którym rysunku prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

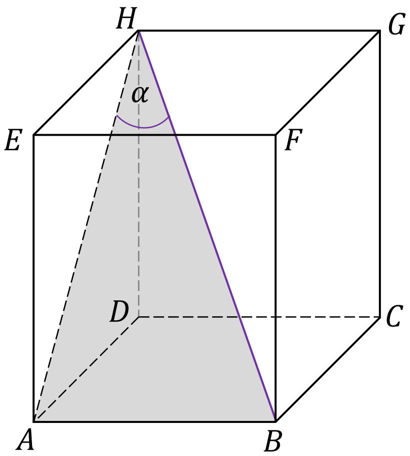
A. $\alpha = \measuredangle BHD$



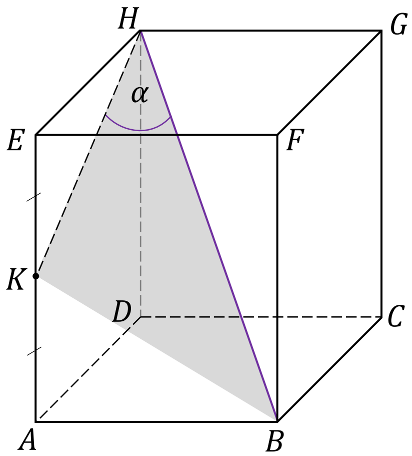
B. $\alpha = \measuredangle BHE$



C. $\alpha = \measuredangle BHA$



D. $\alpha = \measuredangle BHK$



Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:

2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

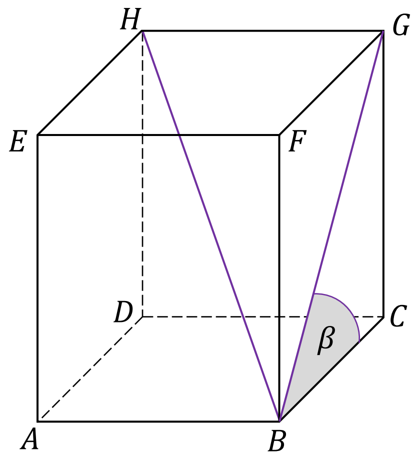
C

Zadanie 43.2. (0–4)

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{7} \qquad |BG| = 2\cdot\sqrt{130} \qquad |BH| = 2\cdot\sqrt{194}$$

gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, β jest miarą kąta $\sphericalangle GBC$. Sytuację ilustruje rysunek poniżej.



Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Wymagania szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami […];
   6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów […] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia pola powierzchni całkowitej graniastosłupa oraz podanie prawidłowego wyniku: $P_c = 1528$.

3 pkt – poprawne obliczenie długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu: $|BC| = 14$, $|CG| = 18$, $|GH| = 16$

LUB

– poprawna metoda obliczenia długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, błąd rachunkowy w obliczeniach i poprawne zapisanie wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu.

2 pkt – obliczenie długości dwóch krawędzi: $|BC| = 14$, $|CG| = 18$ oraz zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BGH: $|BG|^2 + |GH|^2 = |HB|^2$

LUB

– obliczenie długości krawędzi: $|GH| = 16$ oraz zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCG:

$|BC|^2 + |CG|^2 = |BG|^2$ i zapisanie związku $\frac{|CG|}{|BC|} = \frac{9}{7}$.

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCG:

$|BC|^2 + |CG|^2 = |BG|^2$ oraz zapisanie związku $\frac{|CG|}{|BC|} = \frac{9}{7}$

LUB

– zauważenie, że trójkąt BGH jest prostokątny, i zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BGH: $|BG|^2 + |GH|^2 = |HB|^2$

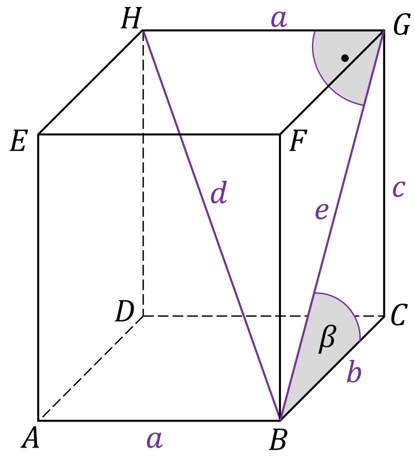
LUB

– zapisanie równania $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (lub z innymi oznaczeniami), gdzie a, b, c, d są oznaczeniami odpowiednich odcinków w prostopadłościanie (zobacz przykładowe rozwiązanie).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wprowadzimy oznaczenia dla odcinków (jak na rysunku obok) – długości krawędzi prostopadłościanu oznaczymy przez a, b, c, a przekątną prostopadłościanu i przekątną ściany $BCGF$ oznaczymy przez d oraz e. Warunki zadania zapiszemy jako:



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{7} \qquad e = 2\cdot\sqrt{130} \qquad d = 2\cdot\sqrt{194}$$

1. Wyznaczymy zależność między b a c w trójkącie BCG:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b} = \frac{9}{7} \qquad \text{stąd} \qquad c = \frac{9}{7}b$$

2. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCG, w celu obliczenia b i c:

$$b^2 + c^2 = e^2$$

Wykorzystamy związek z pkt. 1:

$$b^2 + \left(\frac{9}{7}b\right)^2 = \left(2\cdot\sqrt{130}\right)^2$$

$$\frac{130}{49}b^2 = 520$$

$$b^2 = 196$$

zatem

$$b = 14 \qquad \text{oraz} \qquad c = \frac{9}{7}\cdot 14 = 18$$

3. Zauważmy, że trójkąt BGH jest prostokątny (kąt prosty jest przy wierzchołku G). Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BGH, w celu obliczenia a.

$$e^2 + a^2 = d^2$$

$$\left(2\cdot\sqrt{130}\right)^2 + a^2 = \left(2\cdot\sqrt{194}\right)^2$$

$$a^2 = 256$$

$$a = 16$$

4. Obliczymy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

$$P_c = 2\cdot 16\cdot 14 + 2\cdot 14\cdot 18 + 2\cdot 16\cdot 18$$

$$P_c = 1528$$

Zadanie 44. (0–1)

Dane są dwa prostopadłościany podobne: $\mathcal{B}_1$ oraz $\mathcal{B}_2$. Objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równa V, a objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równe P.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równe

A.	$27P$,	ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy	**1.**	stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.
B.	$9P$,		**2.**	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.
C.	$3\sqrt{3}P$,		**3.**	kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymaganie szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
   7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

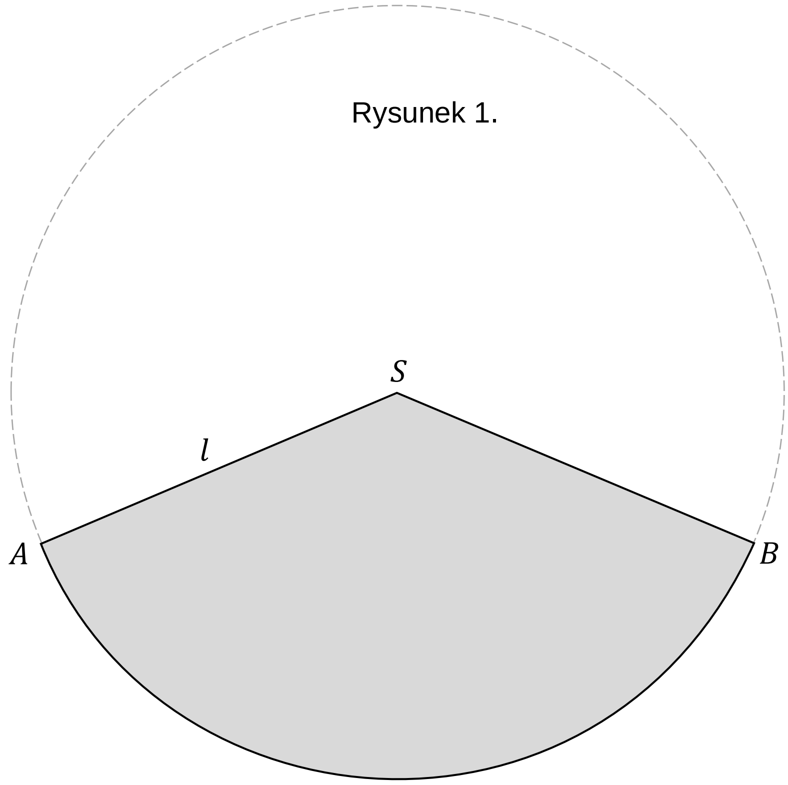
B3

Zadanie 45.

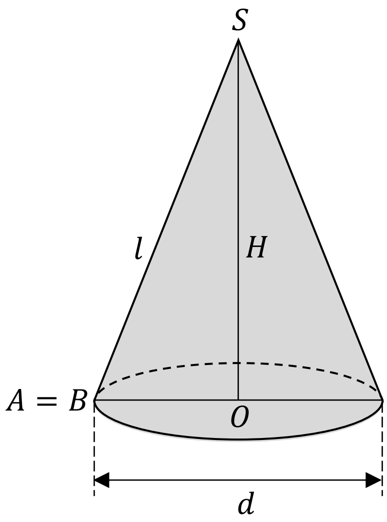
Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt powierzchni bocznej stożka o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l.

Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie wycinka koła o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleiła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.).

Do obliczeń przyjmij, że rzeczywiste figury są idealne.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Zadanie 45.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka, ma miarę (w zaokrągleniu do $1°$)

A. $44°$ **B.** $136°$ **C.** $22°$ **D.** $68°$

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

X. Stereometria. Zdający:
4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 45.2. (0–3)

Oblicz miarę kąta $\sphericalangle BSA$ wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta $\sphericalangle BSA$ podaj w zaokrągleniu do jednego stopnia.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

VIII. Planimetria. Zdający:

6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu.

X. Stereometria. Zdający:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia miary kąta $\sphericalangle BSA$ (lub wyprowadzenie równania na miarę kąta: $|\sphericalangle BSA| = \frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}} \cdot 360°$) oraz podanie prawidłowego wyniku $\sphericalangle BSA \approx 134°$.

2 pkt – poprawne wyprowadzenie i zapisanie związku $\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360°$ oraz zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS: $l^2 = r^2 + H^2$

1 pkt – zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi l = 2\pi r$

LUB

– zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi l^2 = \pi r l$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Wprowadzimy oznaczenia:

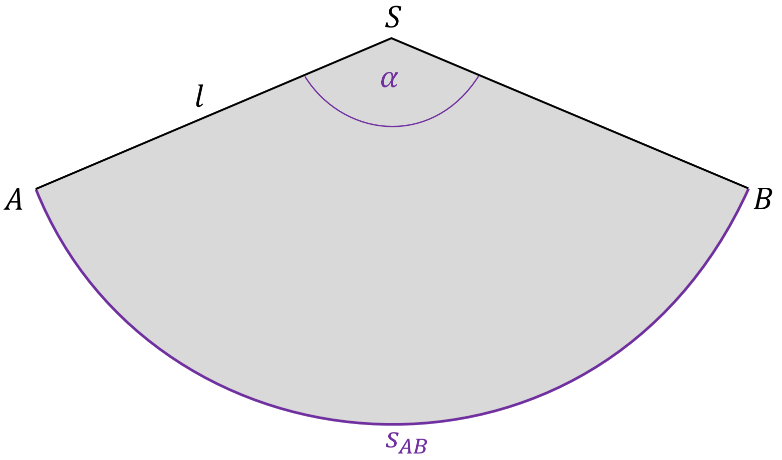
s_{AB} – długość łuku AB wycinka koła ABS.

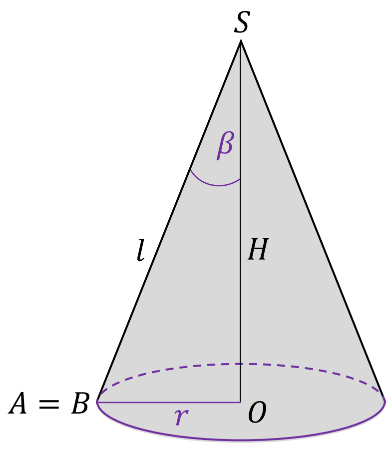
P_{ABS} – pole wycinka koła ABS.

$r = \frac{d}{2}$ – promień okręgu w podstawie stożka.

$\alpha = |\sphericalangle BSA|$ – miara kąta $\sphericalangle BSA$ wycinka koła.

β – połowa miary kąta rozwarcia stożka.





Sposób 1.

Wyprowadzimy wzór końcowy na symbolach danych (pominiemy obliczenia pośrednie).

1. Zauważmy, że z łuku AB wycinka koła powstał okrąg w podstawie stożkowej czapeczki. Zatem długość łuku AB jest równa długości (obwodowi) okręgu w podstawie stożka. Zastosujemy wzór na długość łuku AB oraz wzór na obwód okręgu:

$$s_{AB} = \text{Obw}_{\text{podstawy}}$$

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360°$$

Uwaga
Zauważmy, że otrzymany wzór zadaje nadzwyczaj prostą relację między kątem wycinka koła i kątem rozwarcia stożka:

$$\alpha = \sin\beta \cdot 360°$$

2. Wyrazimy l poprzez H i d na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$l^2 = H^2 + r^2 \qquad \text{zatem} \qquad l^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$l = \sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

3. Zapiszemy wzór na miarę kąta α i ją obliczymy:

$$\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \cdot 360°$$

$$\alpha = \frac{10}{\sqrt{25^2 + 10^2}} \cdot 360°$$

$$\alpha \approx 134°$$

Sposób 2.
Wyprowadzimy wzór końcowy na symbolach danych (pominiemy obliczenia pośrednie).

1. Zauważmy, że pole ABS wycinka koła jest równe polu powierzchni bocznej stożka (polu powierzchni czapeczki). Zastosujemy wzór na pole ABS wycinka koła oraz wzór na pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_{ABS} = P_b$$

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi l^2 = \pi r l$$

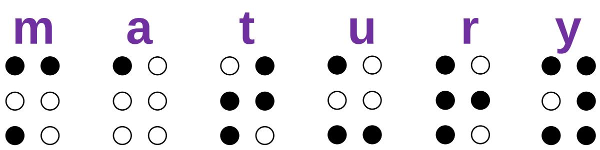
$$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360°$$

Krok 2. i 3. Jak w sposobie 1.

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Zadanie 46. (0–2)

Pojedynczy znak w piśmie Braille'a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów, które mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy miejsca w każdej kolumnie. Poniżej podano przykład napisu w piśmie Braille'a. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłości, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły.



Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille'a.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym […].

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) […].

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie prawidłowej metody do obliczenia wszystkich znaków, uwzględnienie warunku zadania i podanie wyniku: 63.

1 pkt – zapisanie wzoru na liczbę wszystkich możliwych znaków bez uwzględnienia warunku zadania (tzn. łącznie ze znakiem bez punktu wypukłego): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

LUB

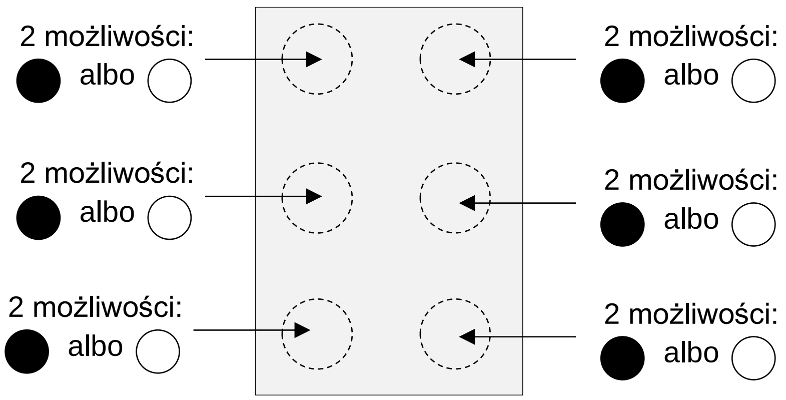
– zastosowanie metody dodawania polegającej na bezpośrednim zliczeniu i dodaniu liczby znaków: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi <u>oraz</u> prawidłowe zliczenie znaków w co najmniej <u>trzech</u> spośród sześciu wymienionych grup.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u> (zastosowanie zasady mnożenia)

Zastosujemy regułę mnożenia. Zauważmy, że utworzenie znaku polega na podjęciu kolejno 6 decyzji o tym, jaki ma być rodzaj punktu – elementu znaku. Punkt może być wypukły albo może nie być wypukły. Zatem mamy <u>dwie możliwości</u> wyboru rodzaju punktu: ● albo ○ .



Zgodnie z regułą mnożenia, w takich przypadkach liczbę możliwości wyboru składnika/elementu obiektu mnożymy przez siebie tyle razy, z ilu elementów składa się obiekt:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

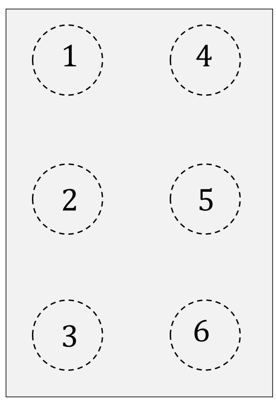
Wszystkich możliwości (łącznie z utworzeniem konfiguracji 6 braków wypukłości) jest 64. Ponieważ znak Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły, to wszystkich znaków jest:

$$64 - 1 = 63$$

<u>Sposób 2.</u> (bezpośrednie zliczenie liczby znaków z zastosowaniem zasady dodawania)

Będziemy kolejno zliczać „na piechotę" znaki: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi. Zbiory znaków z daną liczbą punktów wypukłych oznaczymy odpowiednio jako: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

Aby zliczanie przeprowadzić metodycznie, ułatwimy sobie zadanie <u>numerując punkty</u> w polu znaku, jak na rysunku obok.



W takiej konwencji, przykładowo:

– znak $\begin{matrix}\circ & \circ \\ \bullet & \circ \\ \circ & \circ\end{matrix}$ oznaczymy jedną cyfrą: (2);

– znak $\begin{matrix}\bullet & \bullet \\ \circ & \circ \\ \bullet & \circ\end{matrix}$ oznaczymy trójką cyfr: (1,3,4) – przy czym kolejność zapisu tych cyfr nie ma znaczenia.

$$A_1 = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6)\}$$

$$|A_1| = 6$$

$$A_2 = \begin{Bmatrix} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,5),(4,6) \\ (5,6) \end{Bmatrix}$$

$$|A_2| = 15$$

$$A_3 = \begin{Bmatrix} (1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6), \\ (1,3,4),(1,3,5),(1,3,6), \\ (1,4,5),(1,4,6),(1,5,6), \\ (2,3,4),(2,3,5),(2,3,6) \\ (2,4,5),(2,4,6),(2,5,6) \\ (3,4,5),(3,4,6),(3,5,6) \\ (4,5,6) \end{Bmatrix}$$

$$|A_3| = 20$$

Zauważmy, że każdemu znakowi z dwoma punktami wypukłymi możemy przyporządkować znak z czterema punktami wypukłymi, zamieniając punkty wypukłe na niewypukłe i odwrotnie:

Np. znakowi $\begin{matrix}\bullet & \circ \\ \circ & \circ \\ \bullet & \circ\end{matrix}$ przyporządkujemy znak $\begin{matrix}\circ & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet\end{matrix}$.

Zatem znaków z czterema punktami wypukłymi jest tyle samo, co znaków z dwoma punktami wypukłymi. Podobnie argumentujemy, że znaków z pięcioma punktami wypukłymi jest tyle samo co znaków z jednym punktem wypukłym:

$$|A_4| = |A_2| = 15 \qquad |A_5| = |A_1| = 6$$

$$A_6 = \{(1,2,3,4,5,6)\}$$

$$|A_6| = 1$$

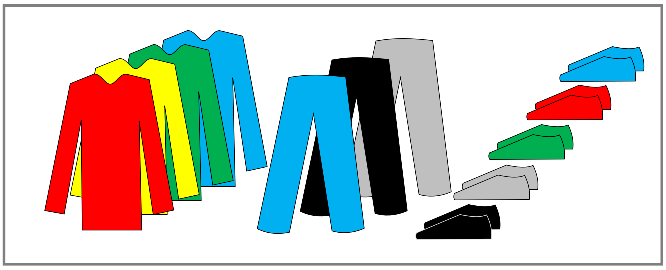
Wszystkich znaków w piśmie Braille'a jest:

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

Zadanie 47.

Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie.

Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrania: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.



Zadanie 47.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrania, jakie może wybrać Andrzej, jest równa

A. 12 **B.** 72 **C.** 60 **D.** 720

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 47.2. (0–3)

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż […].

Zasady oceniania

3 pkt – prawidłowe zastosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania do obliczenia liczby zestawów z jednym elementem niebieskim i podanie prawidłowego wyniku: 26.

2 pkt – zastosowanie reguły mnożenia do obliczenia liczby zestawów, w których kolor niebieski ma albo koszula, albo spodnie, albo buty, i prawidłowe obliczenie liczby zestawów w każdym takim przypadku: $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 2 = 6$.

1 pkt – rozpisanie zestawów ubrań na trzy grupy: w których jeden element jest niebieski, a pozostałe elementy są innych kolorów

LUB

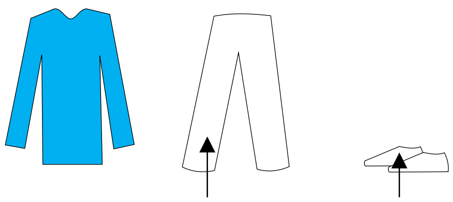
– zastosowanie reguły mnożenia do obliczenia liczby zestawów, w których kolor niebieski ma albo koszula, albo spodnie, albo buty, i prawidłowe obliczenie liczby zestawów w jednym takim przypadku: $2 \cdot 4 = 8$ albo $3 \cdot 4 = 12$ albo $3 \cdot 2 = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpiszemy schematy zestawów ubrań, w których jeden element jest niebieski.

1. Gdy w zestawie jest niebieska koszula, to spodnie mogą być wybrane na 2 sposoby (bez niebieskich), a buty na 4 sposoby (bez niebieskich).

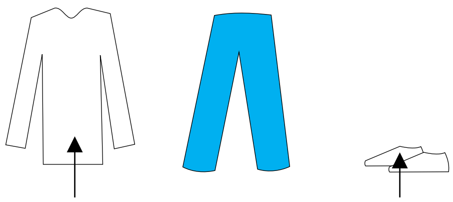


czarne albo szare (2 możliwości)

czarne albo szare, albo zielone, albo czerwone (4 możliwości)

Zestawów z niebieską koszulą jest: $2 \cdot 4 = 8$

2. Gdy w zestawie są niebieskie spodnie, to koszule mogą być wybrane na 3 sposoby (bez niebieskiej), a buty na 4 sposoby (bez niebieskich).

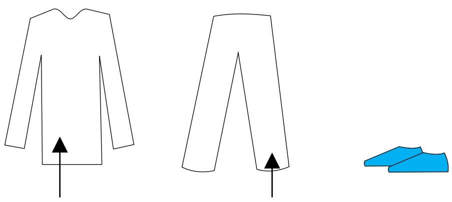


czerwona albo żółta, albo zielona (3 możliwości)

czarne albo szare, albo zielone, albo czerwone (4 możliwości)

Zestawów z niebieskimi spodniami jest: $3 \cdot 4 = 12$

3. Gdy w zestawie są niebieskie buty, to koszule mogą być wybrane na 3 sposoby (bez niebieskiej), a spodnie na 2 sposoby (bez niebieskich).



czerwona albo żółta, albo zielona (3 możliwości)

czarne albo szare (2 możliwości)

Zestawów z niebieskimi butami jest: $3 \cdot 2 = 6$

4. Zestaw z jednym elementem niebieskim może być: zestawem z niebieską koszulą lub zestawem z niebieskimi spodniami, lub zestawem z niebieskimi butami.

Zatem takich zestawów można wybrać:

$$8 + 12 + 6 = 26$$

Zadanie 48. (0–4)

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

Wymagania ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
   2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

Wymagania szczegółowe

XI. Kombinatoryka. Zdający:
   2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż […].

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
   1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania czterocyfrowej, dodatniej liczby parzystej, w której zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3, oraz podanie wyniku: $P(A) = \frac{1}{25}$.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich oraz ile pośród nich jest liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3 oraz podanie prawidłowych wyników: $|\Omega| = 9\,000$, $|A| = 360$

LUB

– zapisanie $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ oraz $|\Omega| = 9\,000$ oraz prawidłowa metoda obliczenia $|A|$– ile jest dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3, z błędem rachunkowym w obliczeniach.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest czterocyfrowych, dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3, oraz podanie poprawnego wyniku: $|A| = 360$

LUB

– poprawna metoda obliczenia, ile jest czterocyfrowych, dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3, błąd rachunkowy w obliczeniach oraz poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich, i zapisanie wyniku: $|\Omega| = 9\,000$

1 pkt – poprawna metoda obliczenia, ile jest wszystkich całkowitych liczb czterocyfrowych dodatnich, i zapisanie wyniku: $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

LUB

– rozpisanie zbioru zdarzeń sprzyjających z prawidłowo określonymi wszystkimi możliwymi pozycjami cyfr 2 i 3 oraz cyframi parzystymi na końcu

LUB

– poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z ostatnią (i dokładnie jedną) cyfrą 2 oraz dokładnie jedną cyfrą 3 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: 176.

LUB

– poprawna metoda zliczenia czterocyfrowych liczb parzystych z ostatnią cyfrą parzystą różną od 2 oraz dokładnie jedną cyfrą 3 i dokładnie jedną cyfrą 2 w zapisie, łącznie z podaniem wyniku: 184.

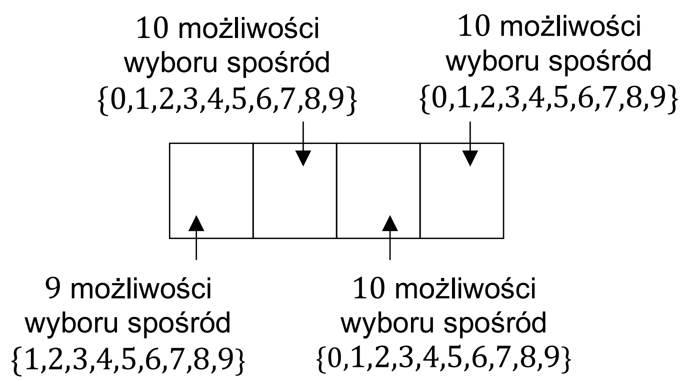
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω składa się ze wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich.

Sposób 1. obliczenia mocy zbioru Ω.

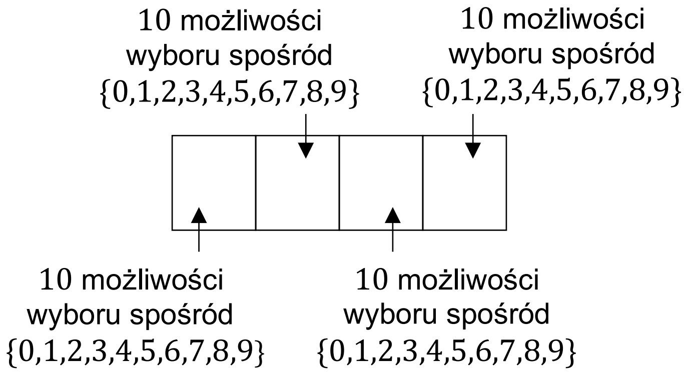
Na diagramie poniżej rozpiszemy schemat liczby czterocyfrowej, gdzie dla każdej pozycji w zapisie dziesiętnym określimy, ile jest możliwości jej uzupełnienia.



Zgodnie z zasadą mnożenia, wszystkich liczb czterocyfrowych dodatnich jest:

$$|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$$

Sposób 2. obliczenia mocy zbioru Ω.
Wszystkich ciągów czterech cyfr (także z zerem na pierwszej pozycji)

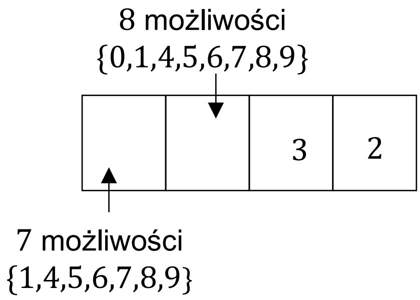


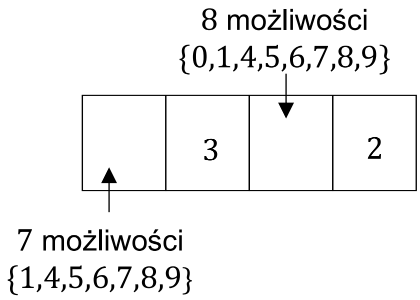
jest $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$. Od tej liczby należy odjąć liczbę takich liczb, w których na pierwszej pozycji występuje zero – takich liczb jest $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.
Zatem wszystkich liczb czterocyfrowych dodatnich jest

$$|\Omega| = 10\,000 - 1\,000 = 9\,000.$$

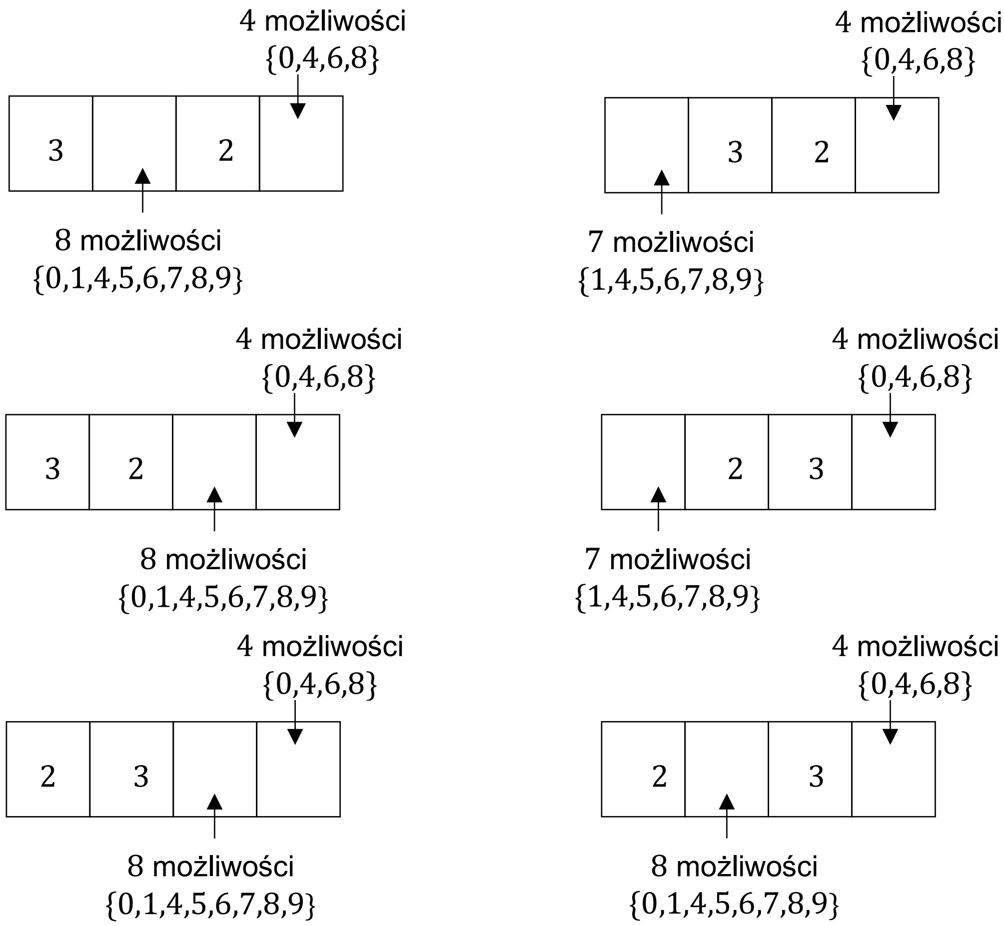
(ciąg dalszy rozwiązania)
Określimy zdarzenie A jako zbiór takich czterocyfrowych dodatnich liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3. Na poniższych diagramach z pozycjami cyfr rozpiszemy schematy liczb czterocyfrowych, spełniających te warunki.

- Liczby parzyste, które mają cyfrę 2 na pozycji czwartej oraz cyfrę 3 na pozycjach trzeciej, drugiej i pierwszej:





- Liczby parzyste, które na ostatniej pozycji mają cyfrę parzystą różną od cyfry 2 oraz cyfry 2 i 3 (dokładnie po jednej) na różnych pozycjach od pierwszej do trzeciej:



Liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających A obliczymy z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania łącznie:

$$|A| = 7\cdot 8 + 7\cdot 8 + 8\cdot 8 + 8\cdot 4 + 7\cdot 4 + \ 8\cdot 4 + 7\cdot 4 + 8\cdot 4 + 8\cdot 4 = 360$$

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{360}{9000} = \frac{1}{25}$$

Zadanie 49. (0–3)

Paweł i Grzegorz postanowili zagrać w grę losową. Ich wspólny kolega będzie kolejno rzucał sześcienną symetryczną kostką do gry, której ścianki są oznaczone od 1 do 6. Gdy na kostce wypadnie liczba oczek mniejsza od 4, to Grzegorz daje Pawłowi 10 żetonów, a gdy na kostce wypadnie liczba oczek równa 6, to Paweł daje Grzegorzowi x żetonów. W pozostałych przypadkach żaden z graczy nie zyskuje ani nie traci żetonów. Paweł i Grzegorz sprawiedliwie ustalili liczbę x żetonów tak, aby wartość oczekiwana zysku z gry Pawła była równa wartości oczekiwanej zysku z gry Grzegorza.

Oblicz ustaloną przez Pawła i Grzegorza liczbę x żetonów.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym […].
2. Używanie języka matematycznego do […] opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Wymagania szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia liczby x żetonów oraz zapisanie wyniku: $x = 30$ żetonów.

2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia na wartość oczekiwaną zysku Pawła oraz na wartość oczekiwaną zysku Grzegorza:

$\mathbb{E}Z_P = +10 \cdot \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6}$, $\mathbb{E}Z_G = -10 \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6}$

LUB

– poprawne zapisanie wyrażenia na wartość oczekiwaną zysku Pawła i stwierdzenie lub zapisanie, że jest ona równa zero, np.: $10 \cdot \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} = 0$

1 pkt – określenie i zapisanie prawdopodobieństw, z jakimi Paweł (lub Grzegorz) traci (lub zyskuje) liczbę 10 żetonów i liczbę x żetonów (samo zapisanie prawdopodobieństw zdarzeń, bez powiązania zdarzeń z odpowiednim zyskiem lub stratą i bez dalszych obliczeń, nie spełnia tego kryterium).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Uwaga! Zgodnie z konwencją, do obliczeń przyjmuje się, że strata to zysk ujemny.

Sposób 1.

Wyprowadzimy wyrażenie ze zmienną x na wartość oczekiwaną zysku z gry Pawła oraz na wartość oczekiwaną zysku z gry Grzegorza. Zaczniemy od Pawła.

1. Określimy zdarzenia wraz z ich prawdopodobieństwami, dla których następuje wymiana żetonów w grze:

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych – wyników rzutu kostką do gry.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \text{zatem} \quad |\Omega| = 6$$

A – zdarzenie polegające na tym, że wypadła liczba oczek mniejsza od 4.

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{zatem} \quad |A| = 3$$

czyli

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

B – zdarzenie polegające na tym, że wypadła liczba oczek równa 6.

$$B = \{6\} \quad \text{zatem} \quad |B| = 1$$

czyli

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

C – zdarzenie polegające na tym, że wypadła liczba oczek równa 4 lub 5.

$$C = \{4,5\} \quad \text{zatem} \quad |C| = 2$$

czyli

$$P(C) = \frac{2}{6}$$

2. Zyski Pawła przy zajściu zdarzeń A, B, C są następujące (zyski Pawła oznaczymy Z_P):

$Z_P(A) = +10$ żetonów

$Z_P(B) = -x$ żetonów

$Z_P(C) = 0$ żetonów

<u>Prawdopodobieństwa osiągnięcia tych zysków są takie, jak prawdopodobieństwa zdarzeń, przy których te zyski zachodzą</u>:

$$P\big(Z_P(A)\big) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P\big(Z_P(B)\big) = P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P\big(Z_P(C)\big) = P(C) = \frac{2}{6}$$

3. Obliczymy wartość oczekiwaną zysku z gry Pawła. Skorzystamy ze wzoru na wartość oczekiwaną:

$$\mathbb{E}Z_P = Z_P(A) \cdot P\big(Z_P(A)\big) + Z_P(B) \cdot P\big(Z_P(B)\big) + Z_P(C) \cdot P\big(Z_P(C)\big)$$

$$\mathbb{E}Z_P = +10 \cdot \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} = 5 - \frac{x}{6}$$

4. Analogicznie zapiszemy wyrażenie na wartość oczekiwaną zysku z gry Grzegorza. Zyski Grzegorza przy zajściu zdarzeń A, B, C są następujące (zyski Grzegorza oznaczymy Z_G):

$Z_G(A) = -10$ żetonów

$Z_G(B) = +x$ żetonów

$Z_G(C) = 0$ żetonów

Zatem wartość oczekiwana zysku z gry Grzegorza dana jest wzorem:

$$\mathbb{E}Z_G = -10 \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} = -5 + \frac{x}{6}$$

5. Zgodnie z warunkiem zadania, wartości oczekiwane zysku z gry Pawła i Grzegorza są sobie równe, zatem:

$$\mathbb{E}Z_P = \mathbb{E}Z_G$$

$5 - \frac{x}{6} = -5 + \frac{x}{6}$ więc $10 - \frac{2x}{6} = 0$

$x = 30$ żetonów

Sposób 2.

Wyprowadzimy wyrażenie ze zmienną x na wartość oczekiwaną zysku Pawła.

Kroki 1.–3. są takie same jak w rozwiązaniu sposobem 1.

4. Zauważmy, że ta gra ma następującą szczególną własność: zysk jednego gracza jest stratą dla drugiego gracza. To oznacza, że wartości oczekiwane zysków Pawła i Grzegorza muszą być liczbami przeciwnymi, a z warunków zadania wynika – że muszą być liczbami równymi sobie. To oznacza, że wartości oczekiwane zysków z gry każdego z graczy są równe 0:

$$\mathbb{E}Z_P = 0$$

$$5 - \frac{x}{6} = 0$$

$x = 30$ żetonów

Uwaga

Fakt, że wartości oczekiwane zysków obu graczy są równe, nie oznacza, że żaden z nich nie osiągnie realnie w rezultacie gry większego zysku. Gra jest losowa, więc może zaistnieć sytuacja, że podczas całej gry będą wypadały kolejno same szóstki i Grzegorz będzie zyskiwał zawsze po 30 żetonów. Równość wartości oczekiwanych oznacza – w rozumieniu potocznym – że żaden z graczy nie ma „statystycznej przewagi” w osiągnięciu większego zysku.

Zadanie 50.

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie $\mathcal{F}$. Na osi poziomej podano – wyrażone w tysiącach złotych – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy $\mathcal{F}$, a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.

Zadanie 50.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest

A.	10 tys. zł,		**1.**	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie $\mathcal{F}$.
B.	4,5 tys. zł,	ponieważ	**2.**	ta wartość zarobków jest największa w firmie $\mathcal{F}$.
C.	4 tys. zł,		**3.**	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie $\mathcal{F}$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
   3) […] znajduje […] dominantę.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C1

Zadanie 50.2. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest .... tys. zł.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
  1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
  3) […] znajduje medianę […].

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Rozwiązanie

Medianą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest ....4,5.... tys. zł.

Komentarz

Medianą zarobków jest wartość znajdująca się po środku w uporządkowanym rosnąco zestawie zarobków wszystkich 75 pracowników firmy $\mathcal{F}$. Zatem będzie to wartość 4,5 tys. zł, znajdująca się na 38 pozycji w tak uporządkowanym zestawie danych.

Zadanie 50.3. (0–2)

Oblicz, jaki % liczby wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ stanowią osoby zarabiające 5,5 tys. zł lub mniej.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
2) stosuje skalę centylową.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia jaki % liczby wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ stanowią osoby zarabiające 5,5 tys. zł lub mniej oraz podanie wyniku 87%.

1 pkt – poprawna metoda obliczenia jaki % liczby wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ stanowią osoby zarabiające 5,5 tys. zł lub mniej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczymy, ile jest łącznie takich osób w firmie $\mathcal{F}$, które zarabiają miesięcznie 5,5 tys. zł lub mniej:

$$N_{1,5-5,5} = 1 + 1 + 4 + 7 + 10 + 14 + 13 + 9 + 6 = 65$$

Określimy, jaki procent wszystkich osób w firmie stanowią łącznie osoby zarabiające miesięcznie 5,5 tys. zł lub mniej:

$$c = \frac{65}{75} \approx 0{,}87 = 87\%$$

Osób w firmie $\mathcal{F}$ zarabiających 5,5 tys. zł lub mniej jest 87%.

Zadanie 50.4. (0–2)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$. Wynik podaj bez zaokrąglania.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymaganie szczegółowe

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający:
   3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia średniej miesięcznych zarobków oraz podanie prawidłowego wyniku:

1 pkt – poprawna metoda obliczenia średniej miesięcznych zarobków: obliczenie sumy iloczynów wartości zarobków i liczby osób osiągających te zarobki oraz podzielenie tej sumy przez liczbę wszystkich pracowników.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Na podstawie danych z wykresu obliczymy średnią miesięcznych zarobków pracowników firmy $\mathcal{F}$:

$$\overline{x} = \frac{(1\cdot 1{,}5 + 1\cdot 2 + 4\cdot 2{,}5 + 7\cdot 3 + 10\cdot 3{,}5 + 14\cdot 4 + 13\cdot 4{,}5 + 9\cdot 5 + 6\cdot 5{,}5)\text{ tys. zł}}{(1+1+4+7+10+14+13+9+6+3+2+1+1+1+2)} +$$

$$+\frac{(3\cdot 6 + 2\cdot 6{,}5 + 1\cdot 7 + 1\cdot 7{,}5 + 1\cdot 8{,}5 + 2\cdot 10)\text{ tys. zł}}{(1+1+4+7+10+14+13+9+6+3+2+1+1+1+2)} = \frac{336\text{ tys. zł}}{75}$$

$$\overline{x} = 4{,}48\text{ tys. zł}$$

3. Informacja o egzaminie maturalnym z matematyki dla absolwentów niesłyszących

Informacje o egzaminie maturalnym z matematyki przedstawione w rozdziale *1. Opis egzaminu maturalnego z matematyki* dotyczą również egzaminu dla absolwentów niesłyszących. Ponadto zdający niesłyszący przystępują do egzaminu maturalnego w warunkach i formie dostosowanych do potrzeb wynikających z ich niepełnosprawności.

Dostosowanie warunków przeprowadzenia egzaminu maturalnego dla absolwentów niesłyszących obejmuje m.in. czas trwania egzaminu. Dostosowanie formy egzaminu maturalnego z matematyki dla absolwentów niesłyszących polega na przygotowaniu odpowiednich arkuszy, w których uwzględnia się zmianę sposobu formułowania treści niektórych zadań i poleceń. Zmiany te dotyczą zamiany pojedynczych słów, zwrotów lub całych zdań – jeśli mogłyby one być niezrozumiałe lub błędnie zrozumiane przez osoby niesłyszące. Zadania mogą być dodatkowo uzupełnione szkicem, tabelą lub inną formą graficzną ilustrującą ich treść. Jednak takie zmiany nie mogą wpływać na merytoryczną treść zadania oraz nie mogą dotyczyć terminów typowych dla danej dziedziny wiedzy.

Szczegółowe informacje z tym związane określone są w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu maturalnego* w danym roku szkolnym.

W dalszej części tego rozdziału zostały przedstawione przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym, które ilustrują sposób dostosowania niektórych zadań wybranych z rozdziału *2. Przykładowe zadania z rozwiązaniami.* Zachowano tę samą numerację zadań.

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Wartość wyrażenia $2021\colon\left(1-\frac{1}{2022}\right)-\left(1-\frac{2022}{2021}\right)\colon\frac{1}{2021}$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2021 **D.** 2023

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 3. (0–1)

Klient banku wpłacił na długoterminową lokatę pewną kwotę. Oprocentowanie na tej lokacie wynosi 3% w skali roku (po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnej kwoty znajdującej się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Dokończ zdanie. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Po 10 latach oczekiwania (bez wypłacania pieniędzy z tej lokaty) klient będzie miał na lokacie kwotę większą od kwoty wpłaconej na początku o (w zaokrągleniu do 1%)

A. 30% **B.** 34% **C.** 36% **D.** 43%

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

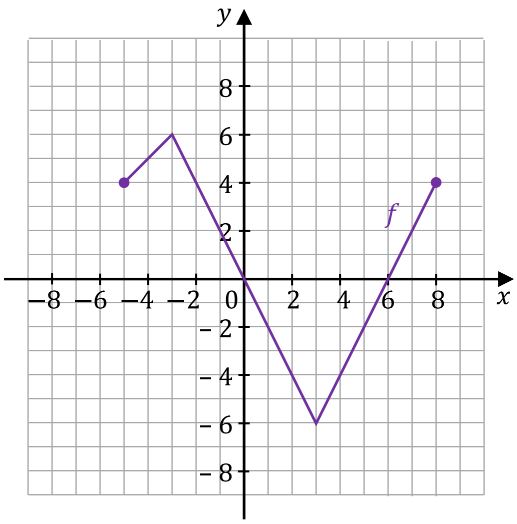
Rozwiązanie

B

Zadanie 19.

Dana jest funkcja $y = f(x)$. Wykres tej funkcji przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [-5, 8]$.



Zadanie 19.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór wszystkich argumentów, dla których prawdziwa jest nierówność:

$$\boldsymbol{f(x) > 2}$$

....

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

$[-5, -1) \cup (7,8]$

Zadanie 19.2. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

....

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązanie

$[-3, 3]$

Zadanie 19.3. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach.

Największa wartość funkcji f jest równa liczbie .... , a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie ....

Zasady oceniania
1 pkt – rozwiązanie poprawne.
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania.

Pełne rozwiązania

Sposób 1. zapisu rozwiązania

Największa wartość funkcji f jest równa liczbie ....6........ , a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie ......-6.............. .

Sposób 2. zapisu rozwiązania

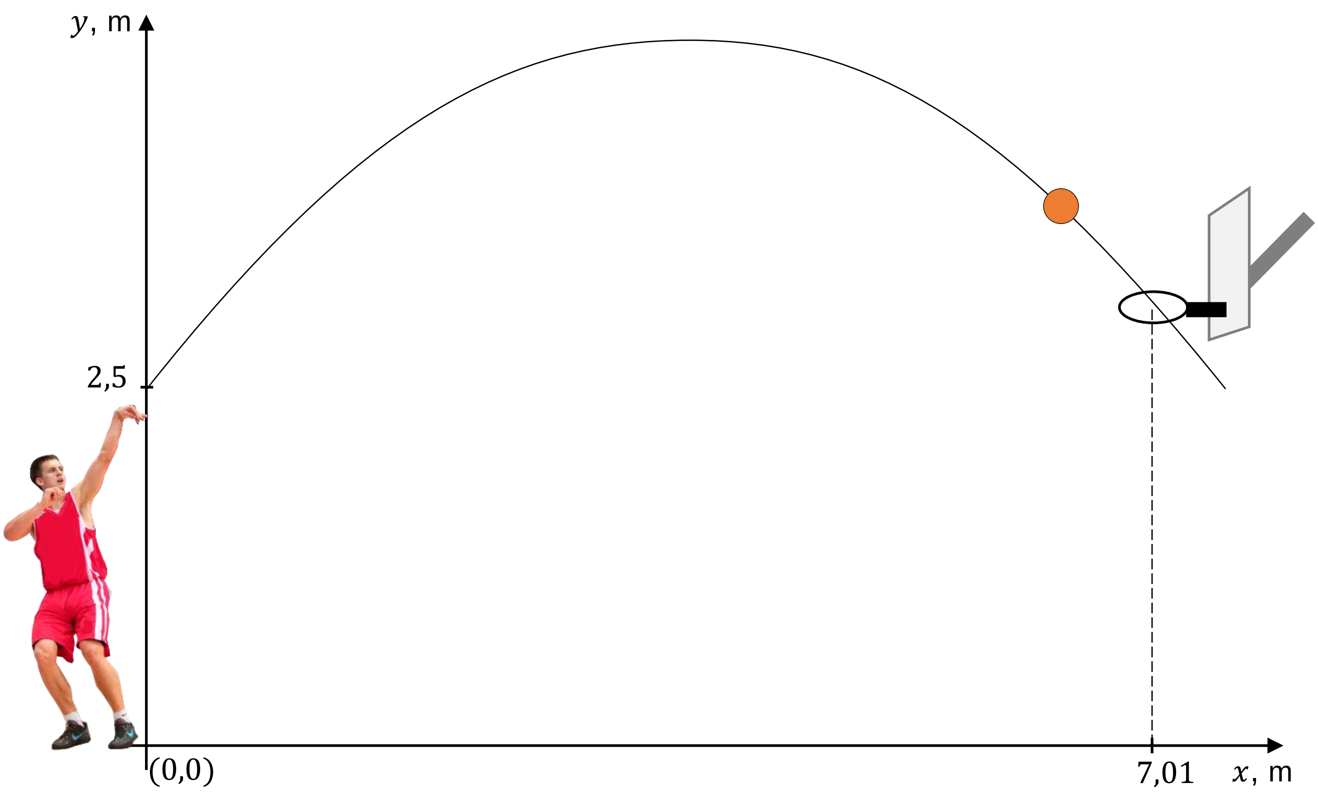
Największa wartość funkcji f jest równa liczbie ..$y = 6$.......... , a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie ......$y = -6$.............. .

Zadanie 22.

Z fizyki wiemy, że torem rzutu – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli. Koszykarz rzucił piłkę do kosza z odległości $x_k = 7{,}01$ m (to odległość od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej). Tor ruchu opiszemy w układzie współrzędnych. W chwili początkowej środek piłki był w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2{,}50$ m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

Rzut był celny, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek obręczy kosza.
Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



Zadanie 22.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Obręcz kosza jest na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do $0{,}01$ m)

A. $3{,}04$ m **B.** $3{,}06$ m **C.** $3{,}8$ m **D.** $4{,}93$ m

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 22.2. (0–2)

Oblicz wysokość maksymalną, na jakiej będzie środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz zapisanie wyniku $4{,}93$ m.
1 pkt – zastosowanie wzoru na wierzchołek paraboli oraz prawidłowe podstawienie wszystkich danych liczbowych do tego wzoru
LUB
– zapisanie wzoru funkcji w postaci $y = -0{,}174(x - p)^2 + q$ oraz zidentyfikowanie q jako współrzędnej wierzchołka paraboli lub wysokości maksymalnej rzutu.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Wysokość maksymalna, na jakiej będzie środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Skorzystamy z gotowego wzoru na wierzchołek paraboli (zobacz w *Wybranych wzorach matematycznych*):

$$h_{max} = y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1{,}3^2 + 4 \cdot 0{,}174 \cdot 2{,}5}{4 \cdot (-0{,}174)} = 4{,}928 \ldots \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Sposób 2.

Wysokość maksymalna, na jaką wzniesie się środek piłki, jest równa współrzędnej y wierzchołka paraboli. Wartość tę możemy wyznaczyć przekształcając wzór funkcji kwadratowej $y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ do postaci kanonicznej:

$$y = -0{,}174(x - p)^2 + q$$

gdzie:

$$h_{max} = y_w = q$$

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5 = -0{,}174\left(x^2 + \frac{1{,}3}{0{,}174}x\right) + 2{,}5 =$$

$$= -0{,}174 \cdot \left[\left(x + \frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 - \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2\right] + 2{,}5 =$$

$$= -0{,}174 \cdot \left(x + \frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 0{,}174 \cdot \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5$$

Zatem:

$$h_{max} = y_w = q = 0{,}174 \cdot \left(\frac{1{,}3}{2 \cdot 0{,}174}\right)^2 + 2{,}5 = 4{,}9281609 \ldots \approx 4{,}93 \text{ m}$$

Zadanie 22.3. (0–3)

W opisanym rzucie piłka przeleciała przez obręcz kosza i upadła na podłogę. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki wynosi 0,12 m.

Oblicz współrzędną x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła podłogi. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia współrzędnej x oraz zapisanie wyniku $8{,}99$ m.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$.

1 pkt – zapisanie równania $0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ lub dwóch równań:

$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ i $y = 0{,}12$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że w momencie gdy piłka upadła i dotknęła podłogi, to punkt środka piłki należy do paraboli oraz jest na wysokości $0{,}12$ m ponad podłogą. Zatem współrzędne środka piłki (x, y) spełniają równanie paraboli, a współrzędna $y = 0{,}12$ m. Zapiszemy układ równań i rozwiążemy go:

$$\begin{cases} y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5 \\ y = 0{,}12 \end{cases}$$

$$0{,}12 = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$
$$0{,}174x^2 - 1{,}3x - 2{,}38 = 0$$

Rozwiązaniami powyższego równania kwadratowego są liczby:

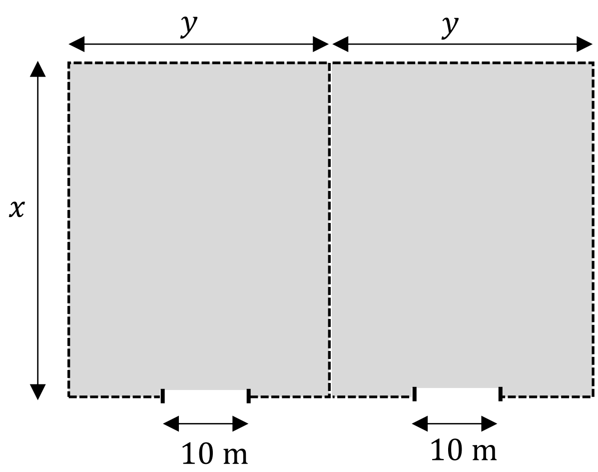
$$x_1 = \frac{1{,}3 - \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348} \qquad x_1 = \frac{1{,}3 + \sqrt{3{,}34648}}{0{,}348}$$

$$x_1 \approx -1{,}52 \qquad x_2 \approx 8{,}99$$

Współrzędna x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu, jest równa w przybliżeniu $8{,}99$ m.

Zadanie 28. (0–4)

Powierzchnia magazynowa będzie na dwóch takich samych prostokątnych działkach. Działki te będą miały jeden wspólny bok. Całość będzie ogrodzona płotem. Dodatkowo działki rozdzieli wspólny płot. W ogrodzeniu będą dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego dwie działki to 580 metrów. Szerokości dwóch bram wjazdowych nie wlicza się w długość płotu.



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia obu wymiarów działki oraz podanie prawidłowych wyników: $x = 100$ m oraz $y = 75$ m.

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole działki w zależności od jednej zmiennej oraz prawidłowe obliczenie współrzędnej x wierzchołka paraboli: $x = 100$ m.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej w zależności od jednej zmiennej:

$P(x) = 2x(150 - \frac{3}{4}x)$ dla $x \in \left(0, \frac{560}{3}\right)$.

1 pkt – zapisanie wzoru na pole całkowite powierzchni magazynowej: $P = x \cdot 2y$

LUB

– zapisanie związku między wymiarami działki: $3x + 4y - 20 = 580$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu. Całkowitą długość płotu – po uwzględnieniu warunków zadania – można zapisać równaniem:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$

Powyższe równanie określa związek między wymiarami x i y. Wymiar y jednej działki musi być większy od 10 m, ze względu na ustaloną szerokość bramy wjazdowej. W związku z tym, w modelu matematycznym uwzględniającym warunki zadania, wymiary x i y spełniają:

$$x > 0 \quad \text{i} \quad y > 10$$

Pole P całkowitej powierzchni magazynowej jest równe polu prostokąta o bokach długości x oraz $2y$. Zatem:

$$P = x \cdot 2y$$

Pole powierzchni magazynowej wyrazimy jako funkcję jednej zmiennej x. W tym celu najpierw wyznaczymy y:

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 580$$
$$4y = 600 - 3x$$
$$y = 150 - \frac{3}{4}x$$

Następnie podstawimy wyznaczone y do wzoru na pole $P = x \cdot 2y$:

$$P(x) = 2x\left(150 - \frac{3}{4}x\right)$$

Wyznaczymy dziedzinę funkcji P. Wykorzystamy związek między wymiarami x i y oraz wykorzystamy warunki, jakie te wymiary spełniają:

$$y = 150 - \frac{3}{4}x \quad \text{oraz} \quad y > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zatem:

$$150 - \frac{3}{4}x > 10 \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

$$x < \frac{560}{3} \quad \text{oraz} \quad x > 0$$

Zmienna x może przyjmować wartości:

$$x \in \left(0, \frac{560}{3}\right)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli $\mathcal{P}$ skierowanej ramionami do dołu. Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$. Współrzędną x wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$ obliczymy z miejsc zerowych funkcji kwadratowej, która jest równaniem tej paraboli. Rozwiążemy zatem równanie:

$$2x\left(150-\frac{3}{4}x\right)=0$$

Z powyższego równania wynika, że:

$$2x=0 \quad \text{lub} \quad 150-\frac{3}{4}x=0$$

$$x_1=0 \quad \text{lub} \quad x_2=200$$

Funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu, który jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $\mathcal{P}$, czyli dla:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=100\ \text{m}$$

Obliczymy drugi wymiar działki, dla którego pole powierzchni magazynowej jest największe:

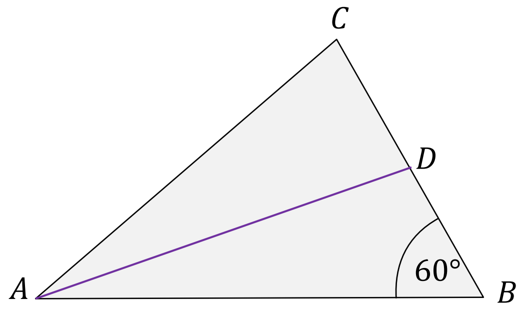
$$y=150\ \text{m}-\frac{3}{4}\cdot 100\ \text{m}=75\ \text{m}$$

Całkowite pole powierzchni magazynowej jest największe dla działki o wymiarach:

$x=100$ m oraz $y=75$ m.

Zadanie 30. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB|=12$, $|BC|=8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC|=60°$. Zobacz rysunek poniżej.



Oblicz długość środkowej tego trójkąta, poprowadzonej z wierzchołka A.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
   1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

Wymagania szczegółowe

VII. Trygonometria. Zdający:
   5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów […].
   6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zasady oceniania

dla rozwiązania sposobem 1.

2 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD oraz prawidłowe obliczenie długości środkowej: $|AD| = 4\sqrt{7}$.

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD:
$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\measuredangle ABC|$
LUB
$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60°$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania

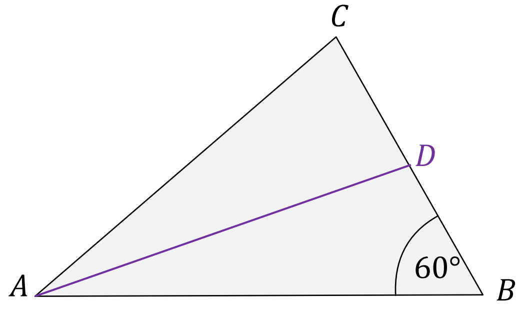
dla rozwiązania sposobem 2.

2 pkt – prawidłowe zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD oraz prawidłowe obliczenie długości środkowej $|AD| = 4\sqrt{7}$.

1 pkt – wyodrębnienie trójkąta prostokątnego AGD oraz trójkąta GBD o kątach: $30°$, $60°$, $90°$, łącznie z poprawnym określeniem długości jego boków: $|GB| = 2$, $|DG| = 2\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania



Sposób 1. (zastosowanie twierdzenia cosinusów)

Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$.

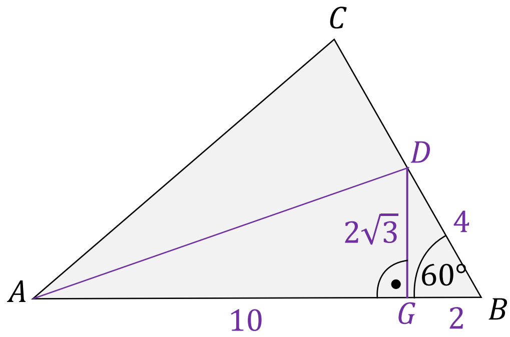
Do obliczenia długości środkowej $|AD|$ zastosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos|\measuredangle ABC|$$

$$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 112$$

$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Sposób 2. (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i własności trójkąta o kątach $30°$, $60°$, $90°$)
Uzupełnimy rysunek pomocniczy (zobacz obok).



W celu obliczenia długości środkowej AD zastosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AGD.

Ponieważ AD jest środkową, to $|BD| = 4$. Rozważmy dalej trójkąt GBD. Trójkąt GBD ma kąty o miarach: $30°$, $60°$, $90°$, skąd wynika, że przyprostokątne tego trójkąta mają długości:

$$|GB| = 2 \qquad\qquad |DG| = 2\sqrt{3}$$

zatem długość przyprostokątnej AG trójkąta AGD jest równa:

$$|AG| = 12 - 2 = 10$$

Obliczymy długość środkowej AD z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGD:

$$|AD|^2 = |AG|^2 + |GD|^2$$

$$|AD|^2 = 10^2 + (2\sqrt{3})^2 = 112$$

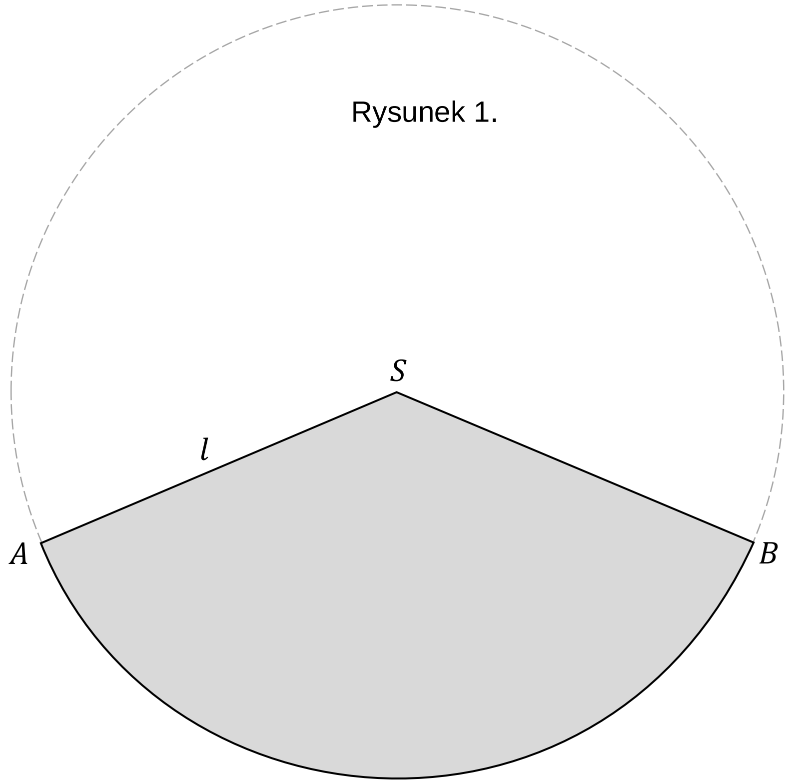
$$|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Zadanie 45.

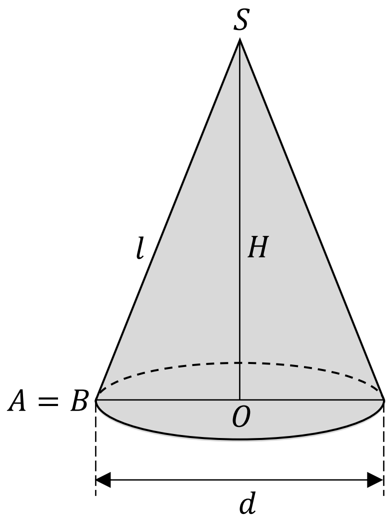
Hania zrobiła czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka ma kształt <u>powierzchni bocznej stożka</u> o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l.

Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na papierze figurę płaską ABS o kształcie <u>wycinka koła</u> o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z papieru, wygięła ją i połączyła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.). W ten sposób otrzymała kształt stożka.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Zadanie 45.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka (rysunek 2.), ma miarę (w zaokrągleniu do 1°)

A. $44°$ **B.** $136°$ **C.** $22°$ **D.** $68°$

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 45.2. (0–3)

Oblicz miarę kąta $\measuredangle BSA$ wycinka koła (rysunek 1.), z którego powstała czapeczka. Kąt $\measuredangle BSA$ podaj w zaokrągleniu do jednego stopnia.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia miary kąta $\measuredangle BSA$ (lub wyprowadzenie równania na miarę kąta: $|\measuredangle BSA| = \frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}} \cdot 360°$) oraz podanie prawidłowego wyniku $\measuredangle BSA \approx 134°$.

2 pkt – poprawne wyprowadzenie i zapisanie związku $\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360°$ oraz zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS: $l^2 = r^2 + H^2$

1 pkt – zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi l = 2\pi r$

LUB

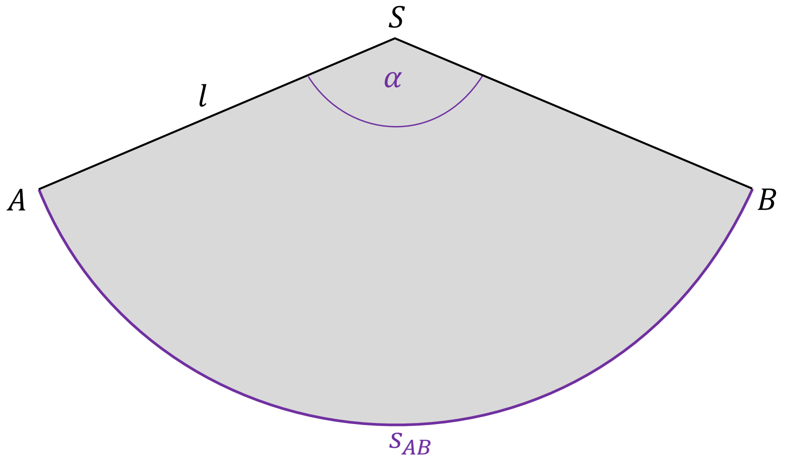
– zapisanie równania $\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi l^2 = \pi r l$

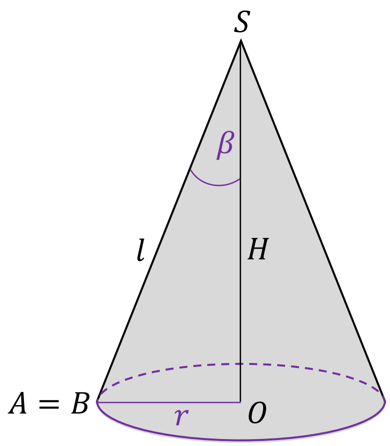
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Wprowadzimy oznaczenia:

s_{AB} – długość łuku AB wycinka koła ABS.
P_{ABS} – pole wycinka koła ABS.
$r = \frac{d}{2}$ – promień okręgu w podstawie stożka.
$\alpha = |\measuredangle BSA|$ – miara kąta $\measuredangle BSA$ wycinka koła.
β – połowa miary kąta rozwarcia stożka.





Sposób 1.

Wyprowadzimy wzór końcowy na symbolach danych (pominiemy obliczenia pośrednie).

1. Zauważmy, że z łuku AB wycinka koła powstał okrąg w podstawie stożkowej czapeczki. Zatem długość łuku AB jest równa długości (obwodowi) okręgu w podstawie stożka. Zastosujemy wzór na długość łuku AB oraz wzór na obwód okręgu:

$$s_{AB} = \text{Obw}_{\text{podstawy}}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$$

Uwaga

Zauważmy, że otrzymany wzór zadaje nadzwyczaj prostą relację między kątem wycinka koła i kątem rozwarcia stożka: $\alpha = \sin\beta \cdot 360^\circ$

2. Wyrazimy l poprzez H i d na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$l^2 = H^2 + r^2 \qquad \text{zatem} \qquad l^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$l = \sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

3. Zapiszemy wzór na miarę kąta α i ją obliczymy:

$$\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{10}{\sqrt{25^2 + 10^2}} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx 134^\circ$$

Sposób 2.

Wyprowadzimy wzór końcowy na symbolach danych (pominiemy obliczenia pośrednie).

1. Zauważmy, że pole ABS wycinka koła jest równe polu powierzchni bocznej stożka (polu powierzchni czapeczki). Zastosujemy wzór na pole ABS wycinka koła oraz wzór na pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_{ABS} = P_b$$

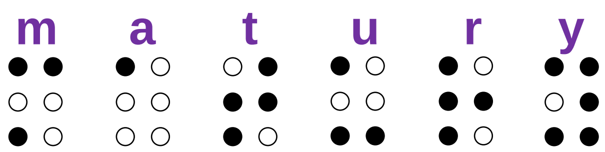
$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = \pi r l$$

$$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$$

Krok 2. i 3. Jak w sposobie 1.

Zadanie 46. (0–2)

Pojedynczy znak (np. litera, przecinek, wykrzyknik, itp.) w piśmie Braille’a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów. Punkty te mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy miejsca w każdej kolumnie. Poniżej podano przykład napisu w piśmie Braille’a. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłości, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille’a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły.



Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille’a.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie prawidłowej metody do obliczenia wszystkich znaków, uwzględnienie warunku zadania i podanie wyniku: 63.

1 pkt – zapisanie wzoru na liczbę wszystkich możliwych znaków bez uwzględnienia warunku zadania (tzn. łącznie ze znakiem bez punktu wypukłego): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

LUB

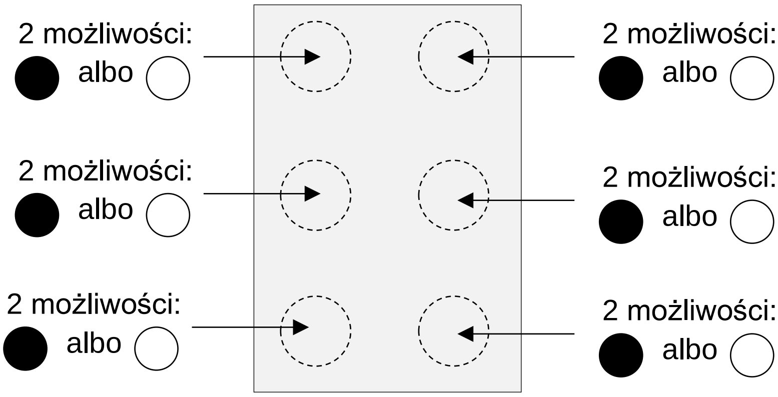
– zastosowanie metody dodawania polegającej na bezpośrednim zliczeniu i dodaniu liczby znaków: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi oraz prawidłowe zliczenie znaków w co najmniej trzech spośród sześciu wymienionych grup.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (zastosowanie zasady mnożenia)

Zastosujemy regułę mnożenia. Zauważmy, że utworzenie znaku to podjęcie kolejno 6 decyzji o tym, jaki ma być rodzaj punktu – elementu znaku. Punkt może być wypukły albo może nie być wypukły. Zatem mamy <u>dwie możliwości</u> wyboru rodzaju punktu: ● albo ○ .



Zgodnie z regułą mnożenia, w takich przypadkach liczbę możliwości wyboru składnika/elementu obiektu mnożymy przez siebie tyle razy, z ilu elementów składa się obiekt:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

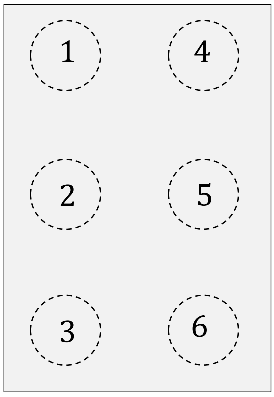
Wszystkich możliwości jest 64. Ponieważ znak Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły, to odrzucamy znak bez wypukłości (sześć białych kropek na schemacie powyżej). Wszystkich znaków jest zatem:

$$64 - 1 = 63$$

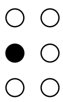
<u>Sposób 2.</u> (bezpośrednie zliczenie liczby znaków z zastosowaniem zasady dodawania)

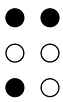
Będziemy kolejno zliczać „na piechotę” znaki: z jednym punktem wypukłym, z dwoma punktami wypukłymi, z trzema punktami wypukłymi, z czterema punktami wypukłymi, z pięcioma punktami wypukłymi i z sześcioma punktami wypukłymi. Zbiory znaków z daną liczbą punktów wypukłych oznaczymy odpowiednio jako: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

Aby zliczanie przeprowadzić metodycznie, ułatwimy sobie zadanie numerując punkty w polu znaku, jak na rysunku obok.



W takiej konwencji, przykładowo:

– znak  oznaczymy jedną cyfrą: (2);

– znak  oznaczymy trójką cyfr: (1,3,4) – przy czym kolejność zapisu tych cyfr nie ma znaczenia.

$$A_1 = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6)\}$$

$$|A_1| = 6$$

$$A_2 = \left\{\begin{matrix} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,5),(4,6) \\ (5,6) \end{matrix}\right\}$$

$$|A_2| = 15$$

$$A_3 = \left\{\begin{matrix} (1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6), \\ (1,3,4),(1,3,5),(1,3,6), \\ (1,4,5),(1,4,6),(1,5,6), \\ (2,3,4),(2,3,5),(2,3,6) \\ (2,4,5),(2,4,6),(2,5,6) \\ (3,4,5),(3,4,6),(3,5,6) \\ (4,5,6) \end{matrix}\right\}$$

$$|A_3| = 20$$

Zauważmy, że każdemu znakowi z dwoma punktami wypukłymi możemy przyporządkować znak z czterema punktami wypukłymi, zamieniając punkty wypukłe na niewypukłe i odwrotnie:

Np. znakowi $\begin{matrix} \bullet & \circ \\ \circ & \circ \\ \bullet & \circ \end{matrix}$ przyporządkujemy znak $\begin{matrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \circ & \bullet \end{matrix}$.

Zatem znaków z czterema punktami wypukłymi jest tyle samo, co znaków z dwoma punktami wypukłymi. Podobnie argumentujemy, że znaków z pięcioma punktami wypukłymi jest tyle samo co znaków z jednym punktem wypukłym:

$$|A_4| = |A_2| = 15 \qquad |A_5| = |A_1| = 6$$

$$A_6 = \{(1,2,3,4,5,6)\}$$

$$|A_6| = 1$$

Wszystkich znaków w piśmie Braille'a jest:

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

Zadanie 49. (0–3)

Paweł i Grzegorz postanowili zagrać w grę losową. Ich kolega będzie kolejno rzucał sześcienną symetryczną kostką do gry. Ścianki tej kostki są oznaczone oczkami od 1 do 6. Gdy na kostce wypadnie 1, 2 lub 3 oczka, to Grzegorz daje Pawłowi 10 żetonów, a gdy na kostce wypadnie 6 oczek, to Paweł daje Grzegorzowi liczbę x żetonów. W pozostałych przypadkach ani Paweł ani Grzegorz nie dostają żetonów. Paweł i Grzegorz sprawiedliwie ustalili liczbę x żetonów tak, aby wartość oczekiwana zysku z gry Pawła była równa wartości oczekiwanej zysku z gry Grzegorza.

Oblicz ustaloną przez Pawła i Grzegorza liczbę x żetonów.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia liczby x żetonów oraz zapisanie wyniku: $x = 30$ żetonów.

2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia na wartość oczekiwaną zysku Pawła oraz na wartość oczekiwaną zysku Grzegorza:

$\mathbb{E}Z_P = +10 \cdot \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6}$, $\mathbb{E}Z_G = -10 \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6}$

LUB

– poprawne zapisanie wyrażenia na wartość oczekiwaną zysku Pawła i stwierdzenie lub zapisanie, że wynosi ona zero, np.: $10 \cdot \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} = 0$

1 pkt – określenie i zapisanie prawdopodobieństw, z jakimi Paweł (lub Grzegorz) traci (lub zyskuje) liczbę 10 żetonów i liczbę x żetonów (samo zapisanie prawdopodobieństw zdarzeń, bez powiązania zdarzeń z odpowiednim zyskiem lub stratą i bez dalszych obliczeń, nie spełnia tego kryterium).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Uwaga! Zgodnie z konwencją, do obliczeń przyjmuje się, że strata to zysk ujemny.

Sposób 1.

Wyprowadzimy wyrażenie ze zmienną x na wartość oczekiwaną zysku z gry Pawła oraz na wartość oczekiwaną zysku z gry Grzegorza. Zaczniemy od Pawła.

1. Określimy zdarzenia wraz z ich prawdopodobieństwami, dla których następuje wymiana żetonów w grze:

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych – wyników rzutu kostką do gry.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad \text{zatem} \qquad |\Omega| = 6$$

A – zdarzenie polegające na tym, że wypadło 1, 2 lub 3 oczka.

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{zatem} \quad |A| = 3$$

czyli

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

B – zdarzenie polegające na tym, że wypadło 6 oczek.

$$B = \{6\} \quad \text{zatem} \quad |B| = 1$$

czyli

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

C – zdarzenie polegające na tym, że wypadło 4 lub 5 oczek.

$$C = \{4,5\} \quad \text{zatem} \quad |C| = 2$$

czyli

$$P(C) = \frac{2}{6}$$

2. Zyski Pawła przy zajściu zdarzeń A, B, C są następujące (zyski Pawła oznaczymy Z_P):

   $Z_P(A) = +10$ żetonów

   $Z_P(B) = -x$ żetonów

   $Z_P(C) = 0$ żetonów

   Prawdopodobieństwa osiągnięcia tych zysków są takie, jak prawdopodobieństwa zdarzeń, przy których te zyski zachodzą:

$$P\big(Z_P(A)\big) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P\big(Z_P(B)\big) = P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P\big(Z_P(C)\big) = P(C) = \frac{2}{6}$$

3. Obliczymy <u>wartość oczekiwaną zysku z gry</u> Pawła. Skorzystamy ze wzoru na wartość oczekiwaną:

$$\mathbb{E}Z_P = Z_P(A)\cdot P\big(Z_P(A)\big) + Z_P(B)\cdot P\big(Z_P(B)\big) + Z_P(C)\cdot P\big(Z_P(C)\big)$$

$$\mathbb{E}Z_P = +10\cdot\frac{1}{2} - x\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{2}{6} = 5 - \frac{x}{6}$$

4. Tak samo zapiszemy wyrażenie na wartość oczekiwaną zysku z gry Grzegorza. Zyski Grzegorza przy zajściu zdarzeń A, B, C są następujące (zyski Grzegorza oznaczymy Z_G):

$Z_G(A) = -10$ żetonów

$Z_G(B) = +x$ żetonów

$Z_G(C) = 0$ żetonów

Zatem wartość oczekiwana zysku z gry Grzegorza dana jest wzorem:

$$\mathbb{E}Z_G = -10\cdot\frac{1}{2} + x\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{2}{6} = -5 + \frac{x}{6}$$

5. Zgodnie z warunkiem zadania, wartości oczekiwane zysku z gry Pawła i Grzegorza są sobie równe, zatem:

$$\mathbb{E}Z_P = \mathbb{E}Z_G$$

$$5 - \frac{x}{6} = -5 + \frac{x}{6} \qquad \rightarrow \qquad 10 - \frac{2x}{6} = 0$$

$x = 30$ żetonów

<u>Sposób 2.</u>

Wyprowadzimy wyrażenie ze zmienną x na wartość oczekiwaną zysku Pawła.

Kroki 1.–3. są takie same jak w rozwiązaniu sposobem 1.

4. Zauważmy, że ta gra ma następującą szczególną własność: zysk jednego gracza jest stratą dla drugiego gracza. To oznacza, że wartości oczekiwane zysków Pawła i Grzegorza muszą być liczbami przeciwnymi, a z warunków zadania wynika – że muszą być liczbami równymi sobie. To oznacza, że wartości oczekiwane zysku z gry każdego z graczy jest równa 0:

$$\mathbb{E}Z_P = 0$$

$$5 - \frac{x}{6} = 0$$

$x = 30$ żetonów

Uchwała Rady Głównej Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Konferencji Rektorów Akademickich Szkół Polskich o informatorach maturalnych od 2023 roku

Rada Główna Nauki i Szkolnictwa Wyższego

KONFERENCJA REKTORÓW KRASP AKADEMICKICH SZKÓŁ POLSKICH

Uchwała
Rady Głównej Nauki i Szkolnictwa Wyższego
oraz
Konferencji Rektorów Akademickich Szkół Polskich
z dnia 19 listopada 2020 r.
w sprawie informatorów o egzaminie maturalnym od roku 2022/2023

Rada Główna Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Konferencja Rektorów Akademickich Szkół Polskich systematycznie i z uwagą obserwują egzamin maturalny, który stanowi podstawowe źródło informacji o poziomie przygotowania kandydatów na studia w polskich uczelniach. W zgodnej opinii obu instytucji przedstawicielskich środowiska akademickiego polski system egzaminacyjny dostarcza w tym zakresie w pełni wiarygodnych i opracowanych na czas danych. Zaufanie do tego systemu przekonująco potwierdziła KRASP wiosną tego roku, deklarując wolę odłożenia rekrutacji do szkół wyższych do czasu, gdy będzie możliwe bezpieczne przeprowadzenie egzaminu maturalnego w roku pandemii.

Drugim, bardzo istotnym zadaniem, które konsekwentne realizuje polski system egzaminacyjny jest wskazywanie za pomocą publikowanych materiałów kierunku rozwoju kształcenia w poszczególnych przedmiotach w stronę umiejętności złożonych, niezbędnych zarówno na studiach, jak i – w coraz większym stopniu – w życiu codziennym.

Ważną rolę w tym procesie odgrywają informatory o egzaminie maturalnym. Z jednej strony wydobywają oraz ilustrują za pomocą zadań najważniejsze wymagania podstawy programowej kształcenia ogólnego. Z drugiej strony, wiarygodnie informują kolejne pokolenia maturzystów o strukturze egzaminu maturalnego oraz o sposobie oceniania ich prac. W naszej opinii, przedłożone do zaopiniowania informatory dobrze realizują te cele.

Środowisko akademickie docenia starania systemu egzaminacyjnego o to, by systematycznie doskonalić swoją pracę i deklaruje dalsze wsparcie merytoryczne tych działań.

prof. dr hab. Zbigniew Marciniak
Przewodniczący Rady Głównej
Nauki i Szkolnictwa Wyższego

prof. dr hab. Inż. Arkadiusz Mężyk
Przewodniczący Konferencji Rektorów
Akademickich Szkół Polskich

EGZAMIN MATURALNY

Matematyka

Z opinii Recenzentów:

Zadania przedstawione w *Informatorze* na poziomie podstawowym pogrupowano według szeroko rozumianych działów. W każdym dziale zamieszczono zadania zamknięte, jak i otwarte, także – co jest nowością – grupy zadań skoncentrowanych wokół jednego tematu. […] Łączenie zadań w grupy jest praktyką stosowana w wielu sprawdzianach, egzaminach i konkursach. Zdecydowanie ułatwia skoncentrowanie się ucznia na danym problemie. […] Pojawienie się wiązek zadań należy uznać za krok w dobrym kierunku […].

Pewna część zadań zamkniętych składa się ze zdań do uzupełnienia wraz z uzasadnieniem. […] Metodologia zadań 33. i 50.1. jest godna uwagi. Sposób ich sformułowania sprawia, że zdający, który rozumie wymaganą definicję, ale nie pamięta jej dokładnie, będzie w stanie odtworzyć ją w czasie egzaminu. Oznacza to odchodzenie od pamięciowego opanowania definicji na rzecz rozumienia treści, które się za nią kryją. Podobną metodologię widać w kilku innych zadaniach.

Warto zaznaczyć, że w *Informatorze* zrezygnowano z takich zadań zamkniętych, które wymagają złożonych rachunków. Tego typu zadania […] pochłaniały niewspółmiernie dużo czasu w stosunku do zysku punktowego. Zrezygnowanie z nich, na rzecz prostych, krótkich zadań otwartych, wydaje się dobrą strategią.

Zadania w *Informatorze* na poziomie podstawowym obejmują całą podstawę programową […]. Niektóre zadania są nieschematyczne, sprawdzające umiejętność rozumowania matematycznego, a nie mechanicznego opanowania sposobów rozwiązywania konkretnych typów zadań. Przykładem zadania nieschematycznego, a jednocześnie prostego, jest zadanie 35., sprawdzające umiejętności skalowania pola i zastosowania twierdzenia Pitagorasa. […] Rozwiązania zadań w *Informatorze* podane są w sposób przejrzysty, często podane są dwa rozwiązania, czasami trzy.

Koncepcja egzaminu maturalnego, która wybija się z *Informatora*, jest ewolucją obecnego egzaminu maturalnego w kierunku jeszcze lepszego sprawdzania umiejętności rozumowania […].

dr hab. Maciej Borodzik

Po zapoznaniu się z *Informatorem* mogę stwierdzić, że nowy arkusz nabierze zupełnie świeżej formy. […] W *Informatorze* pojawiły się – co jest nowością – zadania zamknięte również za 2 pkt, a z drugiej strony znalazły się krótkie zadania otwarte za 1 pkt (np. zadania z luką) […].

Dobrym pomysłem jest to, aby arkusz zawierał zadanie z kontekstem realistycznym / praktycznym, czyli z zastosowaniem matematyki w życiu. Przykładem takiego zadania jest wiązka zadań 22.1.–22.3. z funkcją kwadratową, której wzór opisuje tor ruchu piłki rzuconej przez koszykarza. […] Zdający ma do rozwiązania zadania powiązane tematycznie i dające się niezależnie rozwiązać: oblicza wysokość, na jakiej znajduje się obręcz kosza, oblicza wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się piłka podczas ruchu oraz oblicza położenie środka piłki, gdy ta upadnie na parkiet. […] W wiązkach pojawią się zadania zamknięte oraz otwarte.

Dużym plusem dla zdających będzie to, że nie pojawią się zadania za 5 pkt ani za 6 pkt. […] Dobrze, że w arkuszu będą występowały także zadania schematyczne (np. zadanie 40.), które wolą uczniowie o mniejszych predyspozycjach matematycznych.

Zachęcam nauczycieli i uczniów do szczegółowego zapoznania się z *Informatorem*, stanowiącym ważną wskazówkę dydaktyczną w przygotowaniu do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym […].

Ewa Dolaczyńska

EM 23

ISBN 978-83-66725-05-8

9 788366 725058