Politechnika Łódzka

e-matura

R. Kusztelak, J. Stańdo, K. Szumigaj

Zbiór zadań z matematyki

ZAKRES PODSTAWOWY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CZŁOWIEK - NAJLEPSZA INWESTYCJA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Autorzy:
R. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Zbiór zadań z matematyki
– zakres podstawowy

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt jest współfinansowany przez
Unię Europejską w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie

Recenzenci:
T. Ratusiński
J. Guncaga

Autorzy:
R. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Opracowanie graficzne:
Niceday

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

Książka współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ISBN: 978-83-937551-1-0

Politechnika Łódzka

Politechnika Łódzka, Biuro Projektu
Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki,
Instytut Mechatroniki i Systemów Informatycznych
ul. Stefanowskiego 18/22, pokój 122, 90-924 Łódź, budynek A12
tel. (42) 631 25 69, www.e-matura.p.lodz.pl

e-matura

Spis treści

1 Zakres wymagań – poziom podstawowy[1]

Zdający demonstruje poziom opanowania poniższych umiejętności, rozwiązując zadania, w których:

1. Liczby rzeczywiste

1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);

2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);

3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;

4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;

5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);

6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;

7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;

8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;

9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

2. Wyrażenia algebraiczne:

1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \mp b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

3. Równania i nierówności:

1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;

2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;

3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;

[1] Na podstawie Załącznika nr 4 do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół

4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą;

5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;

6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 - 8$;

7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$;

8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2, \frac{x+1}{x} = 2x$.

4. Funkcje:

1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;

2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;

3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);

4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x+a), y = f(x) + a, y = -f(x), y = f(-x)$;

5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;

6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;

7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);

11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;

12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);

13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;

14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;

15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

5. Ciągi liczbowe:

1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;

3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

6. Trygonometria:

1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dla kątów o miarach od 0^0 do 180^0;

2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);

3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);

4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $sin^2x + cos^2x = 1$, $tgx = \frac{sinx}{cosx}$ oraz $\sin(90^0 - x) = cosx$;

5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

7. Planimetria:

1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym;

2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;

3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;

4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej:

1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);

2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;

3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;

4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;

5) wyznacza współrzędne środka odcinka;

6) oblicza odległość dwóch punktów;

7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

9. Stereometria:

1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty płaski między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;

2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty płaskie między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;

3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąty płaskie między odcinkami oraz kąty płaskie między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;

4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;

5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;

6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka:

1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;

2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;

3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

2 Zbiory liczbowe

2.1 Liczby rzeczywiste

ZADANIE 1.A

Wskaż liczby podzielne przez 6.

176121, 176112, 3333223323, 3333223332.

Rozwiązanie:

> *Liczba całkowita jest podzielna przez* 2 *wtedy i tylko wtedy, gdy jest parzysta.*
>
> *Liczba całkowita jest podzielna przez* 3 *wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez* 3*.*
>
> *Liczba całkowita jest podzielna przez* 6 *wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie podzielna przez* 2 *i* 3*.*

176121 oraz 3333223323 nie są podzielne przez 6, bo nie są podzielne przez 2.

176112 jest podzielna przez 2. Suma jej cyfr $1 + 7 + 6 + 1 + 1 + 2 = 18$, co jest liczbą podzielną przez 3. Zatem i 176112 jest podzielne przez 3. Wobec podzielności liczby 176112 przez 2 oraz 3 jest podzielna przez 6.

3333223332 jest również podzielna przez 2.
Suma jej cyfr $3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 2 = 27$, co jest liczbą podzielną przez 3. Zatem i 3333223332 jest podzielne przez 3. Wobec podzielności liczby 3333223332 przez 2 oraz 3 jest ona podzielna przez 6.

ZADANIE 1.B

Wskaż Liczby podzielne przez 15.

176121, 176112, 555333555,333555333.

Odpowiedź/wskazówka:

555333555

Liczba całkowita jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jedności jest równa 5 lub 0.

Liczba całkowita jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

Liczba całkowita jest podzielna przez 15 wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie podzielna przez 5 i 3.

ZADANIE 1.C

Wskaż Liczby podzielne przez 18.

176121, 176112,

Odpowiedź/wskazówka:

176112.

Aby liczba była podzielna przez 18 musi być podzielna przez 2 (cyfra jedności parzysta) i przez 9 (suma cyfr podzielna przez 9).

ZADANIE 2.A

Definicja. Dwie liczby pierwsze, których różnica wynosi 2 nazywamy bliźniacze.

Podaj przykład liczb bliźniaczych.

Rozwiązanie:

Np. liczby $5, 7$.

ZADANIE 2.B

Definicja. Liczba naturalna, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników właściwych (tzn. od niej mniejszych) nazywamy liczbą doskonałą.

Podaj przykład liczby doskonałej.

Odpowiedź/wskazówka:

Np. 28, bo $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Istnieje liczba doskonała mniejsza od 10 – jaka?

ZADANIE 2.C

Definicja. Liczbami zaprzyjaźnionymi nazywamy pary różnych liczb naturalnych takich, że suma dzielników właściwych każdej z tych liczb równa się drugiej liczbie.

Sprawdź, czy liczby 220 i 284 są zaprzyjaźnione.

Odpowiedź/wskazówka:

Liczby 220 i 284 są zaprzyjaźnione.

Korzystając z przytoczonej definicji wypisujemy dzielniki właściwe tych liczb i sumujemy je.

Dzielniki właściwe liczby 284: 1, 2, 4, 71, 142.

Ich suma: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

Analogicznie postępujemy z dzielnikami właściwymi liczby 220.

Ich suma z kolei daje 284.

ZADANIE 3.A

Wykaż, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie:

Dowód nie wprost:

Przypuśćmy nie wprost, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, tzn. da się przedstawić w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego o całkowitym liczniku i mianowniku. Innymi słowy istnieją $n, k \in \mathbb{N}$ i n, k - względem siebie pierwsze, że

$$\sqrt{2} = \frac{n}{k}$$

gdzie $k \neq 0$.

Z definicji pierwiastka mamy dalej, że

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2 = 2$$

Czyli

$$\frac{n^2}{k^2} = 2$$

Przekształcając uzyskujemy, że

$$n^2 = 2k^2$$

co oznacza, że liczba n^2 jest parzysta.

Prawdziwa jest własności:

(W1): Kwadrat liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą

oraz

(W2): Kwadrat liczby parzystej jest liczbą parzystą.

Z powyższych własności oraz z ostatniej równości wynika zatem, że n - liczba parzysta. Można ją zatem przedstawić w postaci iloczynu pewnej liczby naturalnej p oraz liczby 2

$$n = 2p$$

Podstawiając tak przedstawione n do poprzedniej równości uzyskujemy

$$(2p)^2 = 2k^2$$

Czyli

$$4p^2 = 2k^2$$

Zatem dzieląc stronami przez 2 mamy

$$k^2 = 2p^2$$

Oznacza to, że k^2 jest liczbą parzystą. Wobec własności **(W2)** k jest również parzyste.

Uzyskaliśmy więc, że n oraz k są liczbami parzystymi. Doszliśmy zatem do sprzeczności z założeniem, że są one względnie pierwsze. Zatem $\sqrt{2}$ NIE jest liczbą wymierną.

ZADANIE 3.B

Wykaż, że $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.

Odpowiedź/wskazówka:

Przeprowadź dowód nie wprost podobnie jak w zadaniu 3A

ZADANIE 3.C

Wykaż, że $\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną.

Odpowiedź/wskazówka:

Przeprowadź dowód nie wprost podobnie jak w zadaniu 3A.

2.2 Potęgi i pierwiastki

ZADANIE 1.A

Oblicz:

$$\frac{2^3 \cdot 2^{-4} + 1}{\sqrt{\frac{9}{16}} - 1}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{2^3 \cdot 2^{-4} + 1}{\sqrt{\frac{9}{16}} - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \cdot (-4) = -6$$

ZADANIE 1.B

Oblicz:

$$\frac{(5 \cdot 5^{-2})^2 + 1}{625^{\frac{1}{4}} - 2^0}$$

Odpowiedź/wskazówka:

0,26

ZADANIE 1.C

Oblicz:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{0.125} \cdot \sqrt[4]{2^5} \cdot 2^0}{\sqrt{\frac{1}{256}}}\right)^4$$

Odpowiedź/wskazówka:

2^{17}

ZADANIE 2.A

Oblicz:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{20} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{22}$$

Rozwiązanie:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{20} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{22} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-20} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{22} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2} = \frac{16}{25}$$

ZADANIE 2.B

Oblicz:

$$\sqrt[20]{\left(\frac{1}{7}\right)^{40}}$$

Odpowiedź/wskazówka:

$\frac{1}{49}$

ZADANIE 2.C

Oblicz:

$$\left(\frac{49}{100}\right)^{18} : \left(\frac{7}{10}\right)^{36}$$

Odpowiedź/wskazówka:

1

ZADANIE 3.A

Rozwiąż równanie: $\sqrt{x-2} = 4$

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczamy dziedzinę równania. Zgodnie z definicją funkcja „pierwiastek" ma sens liczbowy tylko dla argumentów nieujemnych, zatem:

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Czyli

$$D =< 2;\ +\infty)$$

Równanie podnosimy stronami do kwadratu. Pozwoli to nam pozbyć się niewygodnego pierwiastka

$$x - 2 = 16$$

Czyli

$$x = 18$$

Uzyskana wartość x należy do dziedziny D, zatem jest to istotnie rozwiązanie naszego równania.

Odpowiedź: $x = 18$

ZADANIE 3.B

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x+1} > -3$

Odpowiedź/Wskazówka

$\boldsymbol{x} \in< -1; +\infty)$

Zwróćmy uwagę, jak ma się zbiór wartości funkcji „pierwiastek" do prawej strony nierówności.

ZADANIE 3.C

Rozwiąż równanie: $\sqrt{(x-3)^2} = 1$.

Odpowiedź/wskazówka:

$x \in \{2, 4\}$

Zwróćmy uwagę, że podniesienie liczby do kwadratu i następnie obliczenie pierwiastka kwadratowego, to w istocie pozbycie się znaku tej liczby…

2.3 Procenty, punkty procentowe

ZADANIE 1.A

Wiadomo, że 15% pewnej liczby równa się 150. Wyznacz tę liczbę.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z proporcji:

$$\begin{array}{ccc} 15\% & - & 150 \\ 100\% & - & x \end{array}$$

Czyli $x = \frac{100\% \cdot 150}{15\%} = 1000.$

Odpowiedź: $1000.$

ZADANIE 1.B

Ile procent liczby 40 stanowi liczba 50?

Odpowiedź/wskazówka:

125%

Możemy również skorzystać z proporcji: wiadomo, że 40 to 100%, zatem 50, to …

ZADANIE 1.C

Która z liczb jest większa 32% z liczby 35 czy 35% z liczby 32?

Odpowiedź/wskazówka:

Wymienione liczby są równe.

Wystarczy skorzystać w każdym z przypadków z definicji procentu.

ZADANIE 2.A

Cenę telefonu obniżono o 10%. O ile procent należy ją podwyższyć, aby telefon kosztował tyle co na początku.

Rozwiązanie:

x – początkowa cena telefonu

$(100\% \ - 10\%) \cdot x = 90\% \cdot x$ – cena telefonu po obniżce

y – procent podwyżki

Niezbędny procent podwyżki obliczymy rozwiązując równanie

$$(100 + y)\% \cdot (90\% \cdot x) = x$$

Po skorzystaniu z definicji procentu uzyskujemy:

$$\frac{(100 + y)}{100} \cdot \frac{90}{100} \cdot x = x$$

Dzieląc stronami przez x (zakładamy, że początkowa cena telefonu jest niezerowa) mamy

$$\frac{(100 + y)}{100} \cdot \frac{9}{10} = 1$$

$$\frac{(100 + y)}{100} = \frac{10}{9}$$

$$y = \frac{100 \cdot 10}{9} - 100 = 11\frac{1}{9}$$

Odpowiedź: Cenę telefonu należy podwyższyć o $11\frac{1}{9}\%$.

ZADANIE 2.B

Cenę telefonu podwyższono o 8%. O ile procent należy ją obniżyć aby telefon kosztował tyle co na początku.

Odpowiedź/wskazówka:

$7\frac{11}{27}$

Patrz – rozwiązanie zadania 2A.

ZADANIE 2.C

Cenę telefonu podwyższono, a następnie obniżono o tyle samo procent. Okazało się, że obecna cena jest o 4% niższa od początkowej. O ile procent podwyższono a następnie obniżono cenę telefonu?

Odpowiedź/wskazówka:

Cenę telefonu najpierw podwyższono, a następnie obniżono o 20%.

Wystarczy dwukrotnie zastosować procedurę z zadania 2A.

ZADANIE 3.A

Początkową cenę telefonu podwyższono o 4%, a następnie obniżono o jeden punkt procentowy. O ile procent ostatecznie wzrosła cena telefonu?

Rozwiązanie:

x – początkowa cena telefonu

$(100\% + 4\%) \cdot x = 104\% \cdot x$ – cena telefonu po podwyżce o 4%.

$(104 - 1)\% \cdot x = 103\% \cdot x$ – cena telefonu po obniżce o 1 punkt procentowy

Ostatecznie cena telefonu wzrosła o 3% (względem ceny początkowej).

ZADANIE 3.B

Początkową cenę telefonu obniżono o 4%, a następnie jeszcze raz obniżono o dwa punkty procentowe. O ile procent ostatecznie obniżono cenę telefonu?

Odpowiedź/wskazówka:

Ostatecznie cenę telefonu obniżono o 2% (względem ceny początkowej).

ZADANIE 3.C

Początkową cenę telefonu podwyższono o 1%, a następnie obniżono o jeden punkt procentowy. O ile procent ostatecznie wzrosła/spadła cena telefonu?

Odpowiedź/wskazówka:

Cena nie uległa zmianie.

2.4 Wartość bezwzględna

ZADANIE 1.A

Rozwiąż równanie: $|x + 3| = 2$.

Rozwiązanie:

Szukamy punktów na osi liczbowe , których odległość od punktu $x = -3$ jest równa 2. Są to zatem: $x = -5$, $x = -1$.

Odpowiedź: $x = -5$, $x = -1$

ZADANIE 1.B

Rozwiąż nierówność: $|2x - 4| > -4$.

Odpowiedź/wskazówka:

$x \epsilon R$

ZADANIE 1.C

Rozwiąż nierówność: $|-x - 3| < -1$.

Odpowiedź/wskazówka:

$\boldsymbol{x} \in \emptyset$

Zwróćmy uwagę, jak mają się do siebie: zbiór wartości funkcji „wartość bezwzględna" oraz prawa strona nierówności.

ZADANIE 2.A

Uzupełnij równanie $|x - \cdots.| = 6$ wiedząc, że rozwiązaniem są liczby $7, -5$.

Rozwiązanie:

Szukamy punktu x_0 na osi liczbowej , którego odległość od każdego z punktów $x = -5$ oraz $x = 7$ wynosi 6. Będzie to zatem środek odcinka o końcach w wymienionych punktach. Mamy więc:

$$x_0 = \frac{-5+7}{2} = 1$$

Odpowiedź: $|x-1| = 6$

ZADANIE 2.B

Uzupełnij nierówność $|x+4| > \cdots$. wiedząc, że rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste.

Odpowiedź/wskazówka:

Np. $|x+4| > -3$, $|x+4| > -10$, itp.

Funkcja „wartość bezwzględna" przyjmuje tylko wartości nieujemne.

ZADANIE 2.C

Uzupełnij nierówność $|x-5| < \cdots$. widząc, że rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Odpowiedź/wskazówka:

Np. $|x-5| < 0$, $|x-5| < -2$, itp.

ZADANIE 3.A

Wiadomo, że $|a+b| \leq |a| + |b|$. Korzystając z tej własności wykaż, że $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Rozwiązanie:

Własność podaną w zadaniu oznaczmy symbolem gwiazdki (*)

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad (*)$$

„Wychodzimy" z lewej strony własności, którą mamy wykazać. Korzystamy z łącznościdodawania oraz dwukrotnie z danej własności (*). Prowadzi to do prawej strony własności

$$L = |a+b+c| = |(a+b)+c| \overset{(*)}{\leq} |a+b| + |c| \overset{(*)}{\leq} |a| + |b| + |c| = P$$

Zatem $L \leq P$, co kończy dowód.

ZADANIE 3.B

Wiadomo, że $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Korzystając z tej własności wykaż, że $|a \cdot (-b)| = |a| \cdot |b|$.

Odpowiedź/wskazówka:

Patrz zadanie 3A.

ZADANIE 3.C

Wiadomo, że $|a + b| \leq |a| + |b|$. Korzystając z tej własności wykaż, że $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Odpowiedź/wskazówka:

Patrz zadanie 3A. Zauważmy, że odjąć od siebie dwie liczby to inaczej do pierwszej z nich dodać liczbę przeciwną do drugiej.

2.5 Logarytmy

ZADANIE 1.A

Oblicz

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 - \log_3 27$$

Rozwiązanie:

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 - \log_3 27 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 - \log_3 3^3 = 3\log_{\frac{1}{2}} 2 - 3\log_3 3 = 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -6$$

Odpowiedź.

-6

ZADANIE 1.B

Oblicz

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{10}} 1$$

Odpowiedź/wskazówka:

2

Pamiętajmy, że $a^0 = 1$ dla dowolnego $a > 0$.

ZADANIE 1.C

Oblicz

$$\log_{\frac{1}{3}} 81 - \log_2 \frac{1}{\sqrt{256}}$$

Odpowiedź/wskazówka:

0

ZADANIE 2.A

Zamień liczbę 3 na logarytm przy podstawie 2.

Rozwiązanie:

Problem postawiony w zadaniu możemy zapisać następująco:

$$\log_2 x = 3$$

gdzie $x > 0$.

Korzystamy teraz z definicji logarytmu

$$2^3 = x$$

Czyli

$$x = 8$$

Odpowiedź/wskazówka:

$\log_2 8 = 3$

ZADANIE 2.B

Ustal dziedzinę logarytmu $\log_x(2 - x)$.

Odpowiedź/wskazówka:

$D = (0; 1) \cup (1; 2)$

Pamiętajmy, że podstawa logarytmu musi być dodatnia i różna od 1 oraz liczba logarytmowana musi być dodatnia.

ZADANIE 2.C

Ustal dziedzinę logarytmu $\log_3(x - 1)^2$.

Odpowiedź/wskazówka:

$D = R\backslash\{1\}$

Pamiętajmy, że liczba logarytmowana musi być dodatnia.

ZADANIE 3.A

Wiadomo, że $a^{\log_a b} = b$ dla $a, b > 0, a \neq 1$. Oblicz $4^{\log_2 3}$.

Rozwiązanie:

$$4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2 \cdot \log_2 3} = 2^{\log_2 3^2} = 2^{\log_2 9}$$

Doprowadziliśmy zatem nasze wyrażenie do postaci, gdzie podstawa potęgi oraz podstawa logarytmu w wykładniku są sobie równe. Pozwala to na skorzystanie z własności podanej w treści zadania

$$2^{\log_2 9} = 9$$

ZADANIE 3.B

Wiadomo, że $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ dla $n, a, b > 0, a \neq 1$. Oblicz $\log_{625} \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{3}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$\log_5 \frac{1}{\sqrt[8]{27}}$ lub co na jedno wychodzi $-\frac{3 \log_5 3}{8}$.

Wystarczy zauważyć, że $625 = 5^4$ i skorzystać z podanej własności.

ZADANIE 3.C

Wiadomo, że $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ dla $a, b > 0, a, b \neq 1$. Uzasadnij, że $3 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.

Odpowiedź/wskazówka:

Po skorzystaniu z podanej własności uzyskujemy w sposób natychmiastowy.

2.6 Wyrażenia algebraiczne

ZADANIE 1.A

Doprowadź do najprostszej postaci korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$(2x+1)^2-\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$$

Rozwiązanie:

$$(2x+1)^2-\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=4x^2+4x+1-(x^2-3)=$$

$$4x^2+4x+1-x^2+3=3x^2+4x+4$$

Odpowiedź/wskazówka:

$3x^2+4x+4$

ZADANIE 1.B

Doprowadź do najprostszej postaci korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$(-2x+1)^2-(-x-3)^2$.

Odpowiedź/wskazówka:

$3x^2-\ 10x-8$

Zwróćmy uwagę, że wygodne będzie skorzystanie z przemienności dodawania (pierwszy nawias) oraz z własności, że $(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$ (to w drugim nawiasie po wcześniejszym…)

ZADANIE 1.C

Oblicz korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$1999^2-3002^2$$

Odpowiedź/wskazówka:

-5016003

ZADANIE 2.A

Zapisz wyrażenie: $x^3 + 2x^2 + x + 2$ w postaci iloczynowej.

Rozwiązanie:

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x^2 + 1)$$

Odpowiedź: $(x + 2)(x^2 + 1)$

ZADANIE 2.B

Zapisz wyrażenie: $x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 8$ w postaci iloczynowej.

Odpowiedź/wskazówka:

$(x + 2)(x - 2)(x^3 + 2)$

ZADANIE 2.C

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias: $x^5y - 3x^2y^2 - xy$.

Odpowiedź/wskazówka:

$xy(x^4 - 3xy - 1)$

ZADANIE 3.A

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest nieparzysta.

Rozwiązanie:

Niech n – dowolna liczba naturalna. Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych będzie miała zatem postać:

$$n^2 - (n + 1)^2 = n^2 - (n^2 + 2n + 1) = n^2 - n^2 - 2n - 1 = -2n - 1 = -(2n + 1)$$

Zauważmy, że $2n + 1$ jest zawsze nieparzyste jako suma liczby parzystej $2n$ i jedynki. Pomnożenie $2n + 1$ przez -1 oczywiście nie „psuje” nieparzystości tej liczby.

ZADANIE 3.B

Wyprowadź wzór na kwadrat sumy trzech liczb.

Odpowiedź/wskazówka:

Wzór: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Zauważmy, że wystarczy skorzystać z łączności dodawania oraz wzoru na kwadrat sumy dwóch liczb.

ZADANIE 3.C

Uzasadni, że $(n+3)(n+4)$ nie może być liczbą pierwszą dla dowolnego $n \in N$.

Odpowiedź/wskazówka:

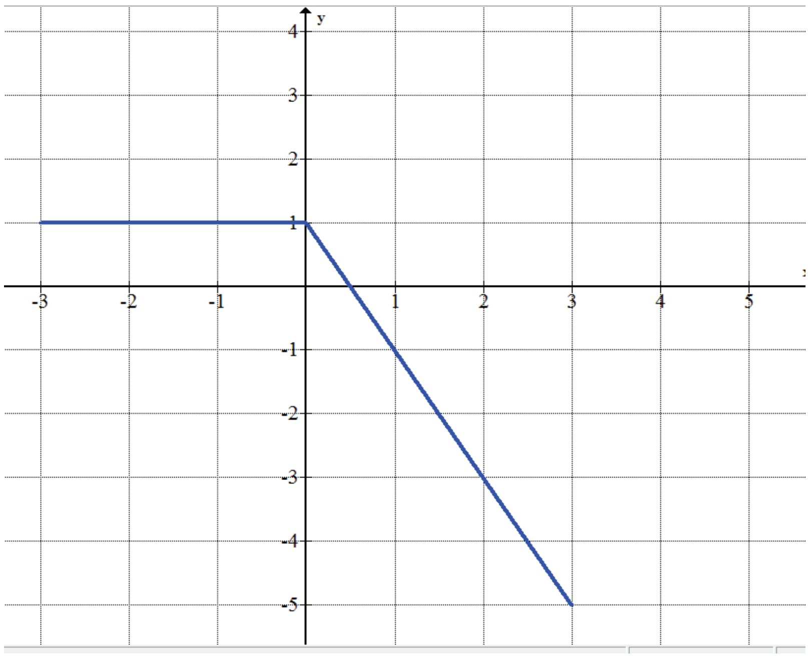
Rozważ dwa przypadki: gdy n jest parzyste oraz: gdy n jest nieparzyste i zastanów się nad parzystością/nieparzystością liczby powyższej postaci.

3 Funkcje

3.1 Ogólne pojęcie funkcji i jej własności

ZADANIE 1.A

Omów własności funkcji na podstawie poniższego wykresu.



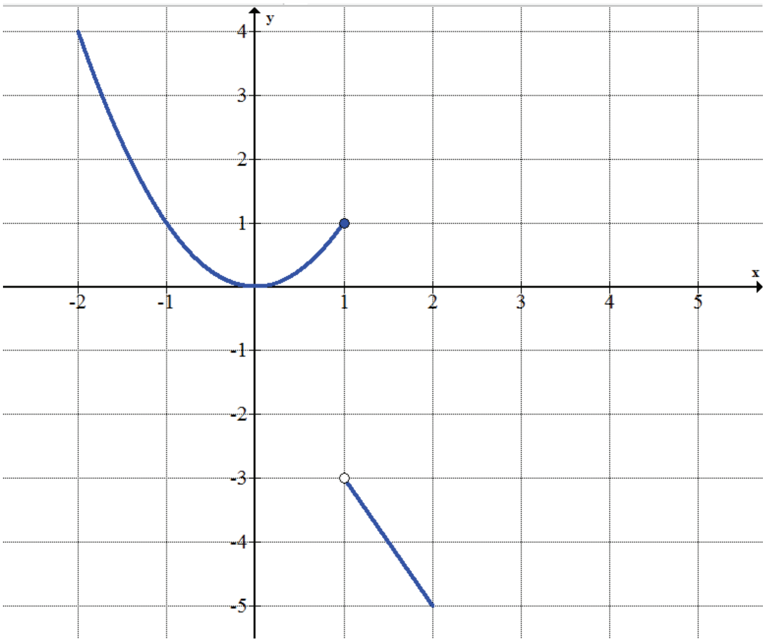
Rozwiązanie:

- Dziedzina: $< -3; 3 >$
- Zbiór wartości funkcji: $< -5; 1 >$
- Miejsce zerowe: $x = \frac{1}{2}$
- Dla $x \in < -3; 0 >)$ funkcja jest stała
- Dla $x \in < 0; 3 >$ funkcja jest malejąca
- Wartość najmniejsza: (-5) dla $x = 3$
- Wartość największa: 1 dla $x \in < -3; 0 >$
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in < -3; \frac{1}{2})$

- Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (\frac{1}{2}; 3 >$
- Funkcja NIE jest różnowartościowa
- Funkcja NIE jest ściśle monotoniczna

ZADANIE 1.B

Omów własności funkcji na podstawie poniższego wykresu.

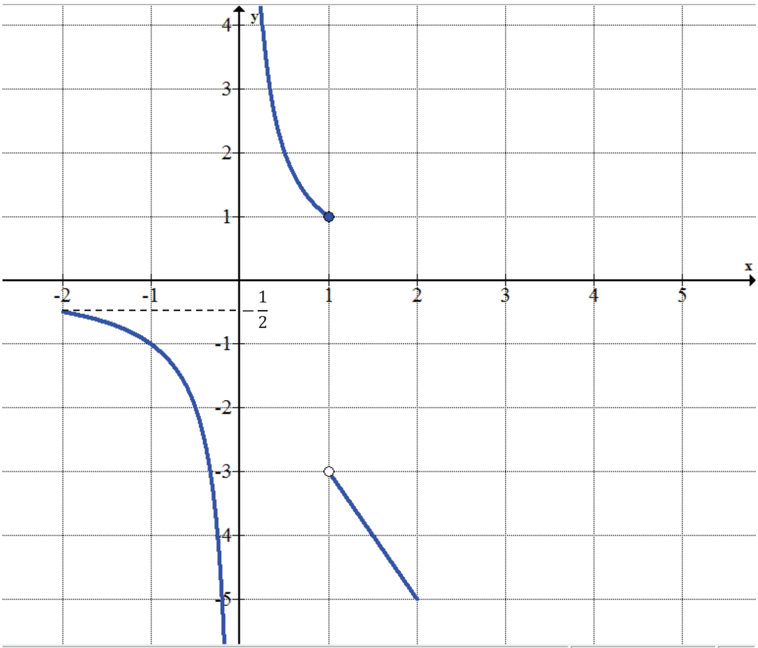


Odpowiedź/wskazówka:

- Dziedzina: $< -2; 2 >$
- Zbiór wartości funkcji: $< -5; -3) \cup < 0; 4 >$
- Miejsce zerowe: $x = 0$
- Dla $x \in < -2; 0)$ funkcja jest malejąca
- Dla $x \in < 0; 1 >$ funkcja jest rosnąca
- Dla $x \in (1; 2 >$ funkcja jest malejąca
- Wartość najmniejsza: (-5) dla $x = 2$
- Wartość największa: 4 dla $x = -2$
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in < -2; 0) \cup (0; 1 >$
- Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (1; 2 >$
- Funkcja NIE jest różnowartościowa
- Funkcja NIE jest ściśle monotoniczna

ZADANIE 1.C

Omów własności funkcji na podstawie poniższego wykresu.



Odpowiedź/wskazówka:

- Dziedzina: $< -2; 0) \cup (0; 2 >$
- Zbiór wartości funkcji: $< -\infty; -\frac{1}{2} > \cup < 1; +\infty >$
- Miejsca zerowe: brak
- Dla $x \in < -2; 0)$ funkcja jest malejąca
- Dla $x \in (0; 2 >$ funkcja jest malejąca
- Wartość najmniejsza: brak
- Wartość największa: brak
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (0; 1 >$
- Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in < -2; 0) \cup (1; 2 >$
- Funkcja NIE jest różnowartościowa
- Funkcja NIE jest ściśle monotoniczna

ZADANIE 2.A

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , x \leq 0 \\ -x & , x > 0 \end{cases}$. Znajdź wzór funkcji $g(x) = f(x-2)$.

Rozwiązanie:

Aby znaleźć wzór funkcji $g(x) = f(x-2)$ do wzoru funkcji $f(x)$ w miejsce zmiennej x wstawiamy $x-2$.

$$f(x-2) = \begin{cases} (x-2)^2 - 2(x-2) & , x-2 \leq 0 \\ -(x-2) & , x-2 > 0 \end{cases}$$

Wykonując działania wzory opisujące funkcję uzyskują postaci:

$$f(x-2) = \begin{cases} x^2 - 6\,x + 8 & , x \leq 2 \\ -x + 2 & , x > 2 \end{cases}$$

Skoro $g(x) = f(x-2)$, więc ostatecznie

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 6\,x + 8 & , x \leq 2 \\ -x + 2 & , x > 2 \end{cases}$$

ZADANIE 2.B

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & x \leq 1 \\ -2 & x > 1 \end{cases}$. Znajdź wzór funkcji $g(x) = f(x+1) - 2$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$g(x) = f(x+1) - 2 = \begin{cases} (x+1)^3 + 2 - 2 & x+1 \leq 1 \\ -2 - 2 & x+1 > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = f(x+1) - 2 = \begin{cases} (x+1)^3 & x \leq 0 \\ -4 & x > 0 \end{cases}$$

ZADANIE 2.C

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 2^x & x > 1 \end{cases}$. Znajdź wzór funkcji $g(x) = f(x+1) - 2$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$g(x) = f(x+1) - 2 = \begin{cases} 0 - 2 & x+1 \leq 1 \\ 2^{x+1} - 2 & x+1 > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = f(x+1) - 2 = \begin{cases} -2 & x \leq 0 \\ 2^{x+1} - 2 & x > 0 \end{cases}$$

ZADANIE 3.A

Dana jest funkcja $sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Znajdź wzór i narysuj wykres funkcji $g(x) = sgn(x) \cdot f(x)$, gdzie $f(x) = 2^x$.

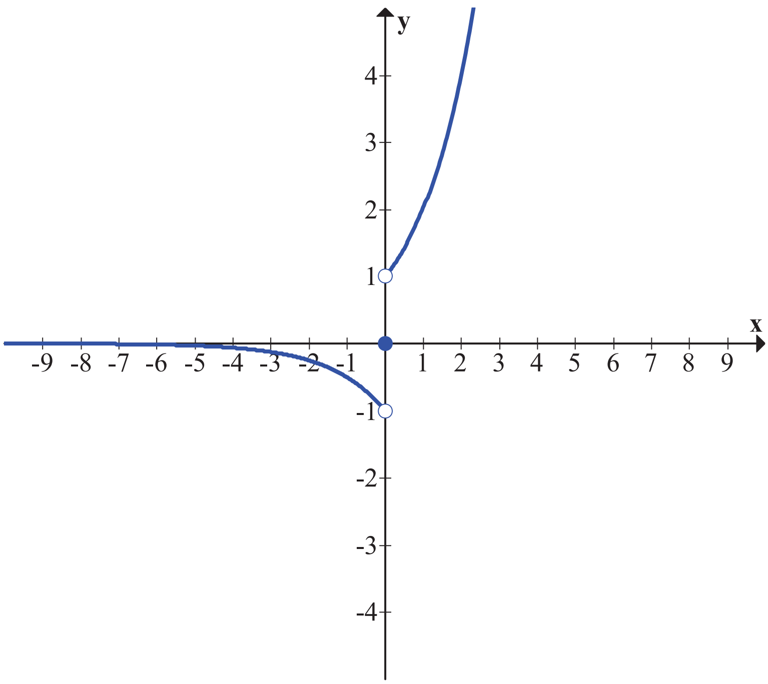
Rozwiązanie:

Funkcja $g(x)$ jest zatem iloczynem funkcji $\mathrm{sgn}(x)$ oraz funkcji $f(x)$:

$$g(x) = sgn(x) \cdot f(x) = \begin{cases} -1 \cdot 2^x & x < 0 \\ 1 \cdot 2^x & x > 0 \\ 0 \cdot 2^x & x = 0 \end{cases}$$

Co możemy zapisać również w prostszej postaci:

$$g(x) = sgn(x) \cdot f(x) = \begin{cases} -2^x & x < 0 \\ 2^x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



ZADANIE 3.B

Dana jest funkcja $sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Znajdź wzór i narysuj wykres funkcji $g(x) = sgn(x^2) \cdot f(x)$, gdzie $f(x) = x^2 + 4x$.

Odpowiedź/wskazówka:

Rozważmy najpierw funkcję $sgn(x^2)$. Zauważmy, że jeśli $x < 0$, to $x^2 > 0$. Zatem funkcja $sgn(x^2)$ przyjmie postać:

$$sgn(x^2) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Czyli

$$g(x) = sgn(x^2) \cdot f(x) = \begin{cases} 1 \cdot (x^2 + 4x) & x \neq 0 \\ 0 \cdot (x^2 + 4x) & x = 0 \end{cases}$$

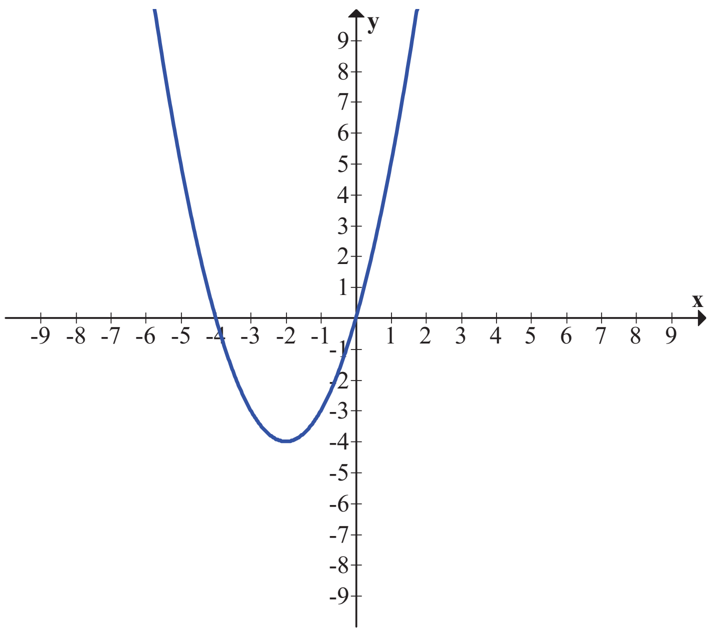
Zatem

$$g(x) = sgn(x^2) \cdot f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Zauważmy dalej, że funkcja $f(x) = x^2 + 4x$ dla argumentu $x = 0$ przyjmuje wartość 0.

W rezultacie wzór można zapisać w postaci:

$$g(x) = x^2 + 4x$$



ZADANIE 3.C

Dana jest funkcja $sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Znajdź wzór i narysuj wykres funkcji $g(x) = \frac{sgn(x)}{f(x)}$, gdzie $f(x) = |x|+1$.

Odpowiedź/wskazówka:

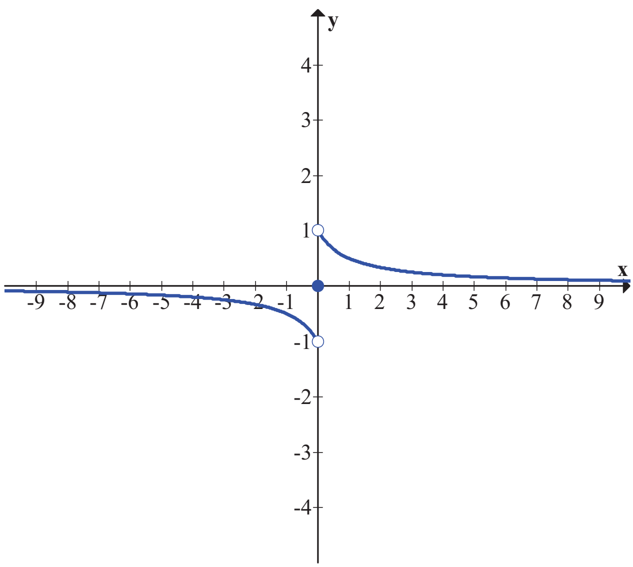
$$g(x) = \frac{sgn(x)}{f(x)} = \begin{cases} -\frac{1}{|x|+1} & x < 0 \\ \frac{1}{|x|+1} & x > 0 \\ \frac{0}{|x|+1} & x = 0 \end{cases}$$

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej uzyskujemy

$$g(x) = \frac{sgn(x)}{f(x)} = \begin{cases} -\frac{1}{-x+1} & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$g(x) = \frac{sgn(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



3.2 Funkcja liniowa

ZADANIE 1.A

Dana jest funkcja liniowa: $y = 3x - 2$. Napisz równanie prostej

a) równoległej
b) prostopadłej

przechodzącej przez punkt $(0,4)$.

Rozwiązanie:

Przypomnijmy niezbędne własności

- Równanie kierunkowe prostej o zadanym współczynniku kierunkowym m przechodzącej przez punkt o współrzędnych (x_0, y_0) ma postać:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Dwie proste w postaci kierunkowej są równoległe, gdy mają jednakowe współczynniki kierunkowe.
- Dwie proste w postaci kierunkowej są prostopadłe, gdy ich iloczyn współczynników kierunkowych wynosi (-1).

Ad. a)

Współczynnik kierunkowy danej prostej wynosi 3 czyli $m = 3$. Dany punkt ma współrzędne $(0,4)$, czyli $(x_0, y_0) = (0,4)$.

Zatem równanie kierunkowe prostej równoległej do danej prostej ma postać

$$y - 4 = 3(x - 0)$$

Czyli

$$y = 3x + 4$$

Ad b)

Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej wynosi $-\frac{1}{3}$ czyli $m = -\frac{1}{3}$. Dany punkt ma współrzędne $(0,4)$, czyli $(x_0, y_0) = (0,4)$.

Zatem równanie kierunkowe prostej prostopadłe do danej prostej ma postać

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 0)$$

Czyli

$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

ZADANIE 1.B

Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych $A = (1,3)$, $B = (2,6)$.

Odpowiedź/wskazówka:

Równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa dane punkty $A = (x_a, y_a)$ oraz $B = (x_b, y_b)$ ma postać:

$$y - y_a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \cdot (x - x_a)$$

Skoro $A = (1,3)$, $B = (2,6)$, więc równanie odpowiedniej prostej przyjmuje postać

$$y - 3 = \frac{6 - 3}{2 - 1} \cdot (x - 1)$$

Czyli

$$y = 3x$$

ZADANIE 1.C

Sprawdź, czy wszystkie trzy punkty $A = (1,3)$, $B = (3,7)$, $C = (5,10)$ należą do jednej prostej.

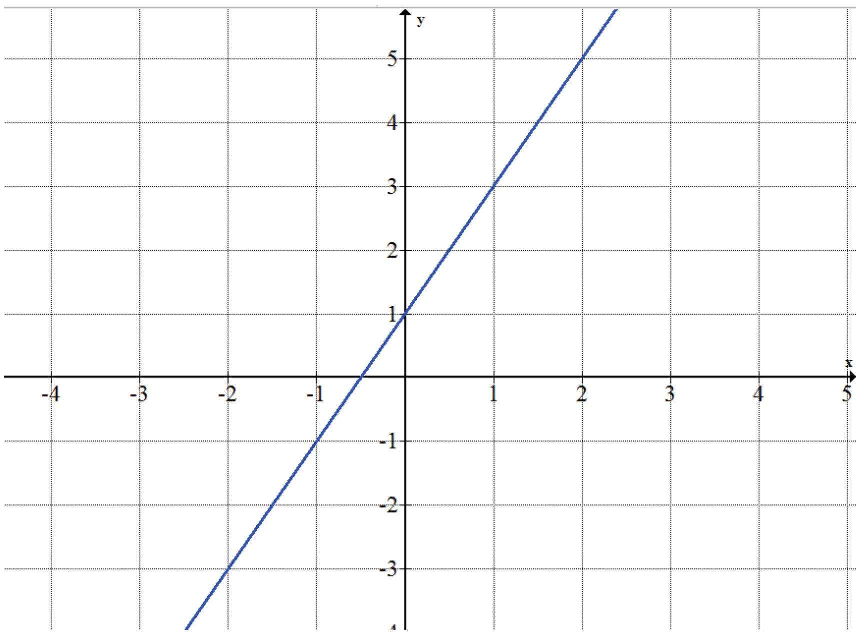
Odpowiedź/wskazówka:

Punkty A, B, C NIE leżą na jednej prostej.

Wystarczy znaleźć równanie prostej przechodzącej przez dwa z danych punktów i sprawdzić, czy współrzędne trzeciego punktu spełniają równanie znalezionej prostej.

ZADANIE 2.A

Znajdź wzór funkcji na podstawie jej wykresu.



Rozwiązanie:

Pierwszy sposób

Zauważmy, że dana prosta przechodzi np. przez punkty: $A = (0,1)$ oraz $B = (1,3)$.

Stosując wzór na prostą przechodzącą przez dwa dane punkty uzyskujemy:

$$y - 1 = \frac{3-1}{1-0} \cdot (x - 0)$$

Czyli

$$y = 2x + 1$$

Drugi sposób

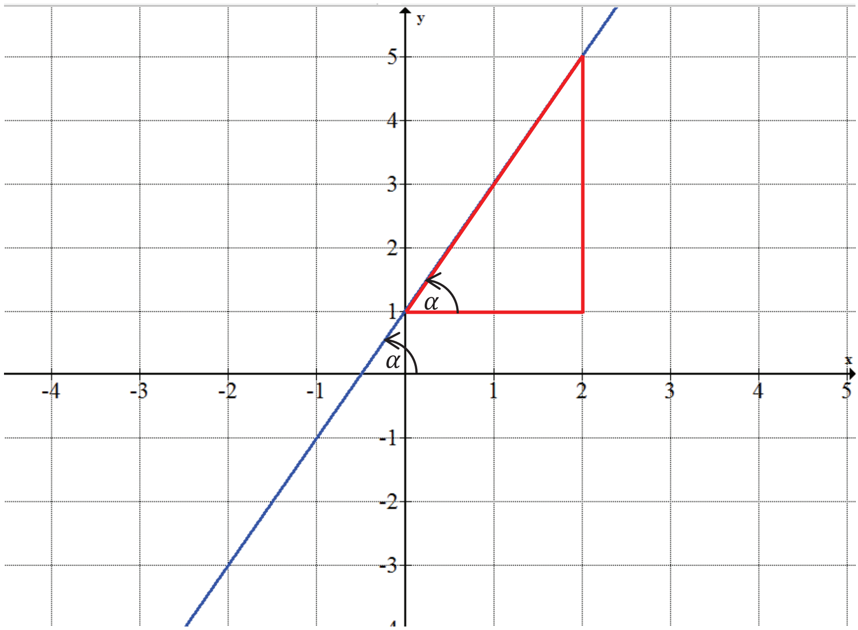
Można też prościej. Zauważmy, że w równaniu kierunkowym prostej $y = ax + b$ mamy odpowiednio:

a - współczynnik kierunkowy, $a = \operatorname{tg} \alpha$, α - kąt jaki tworzy prosta z dodatnim zwrotem osi OX

b - wyraz wolny (w punkcie $(0, b)$ przecina się wykres z osią OY)

Natychmiast mamy zatem, że $b = 1$.

Zaznaczmy zatem kąt α w układzie współrzędnych, zbudujmy odpowiedni trójkąt prostokątny o kącie ostrym α i licząc jego tangens wyznaczmy współczynnik kierunkowy naszej prostej.

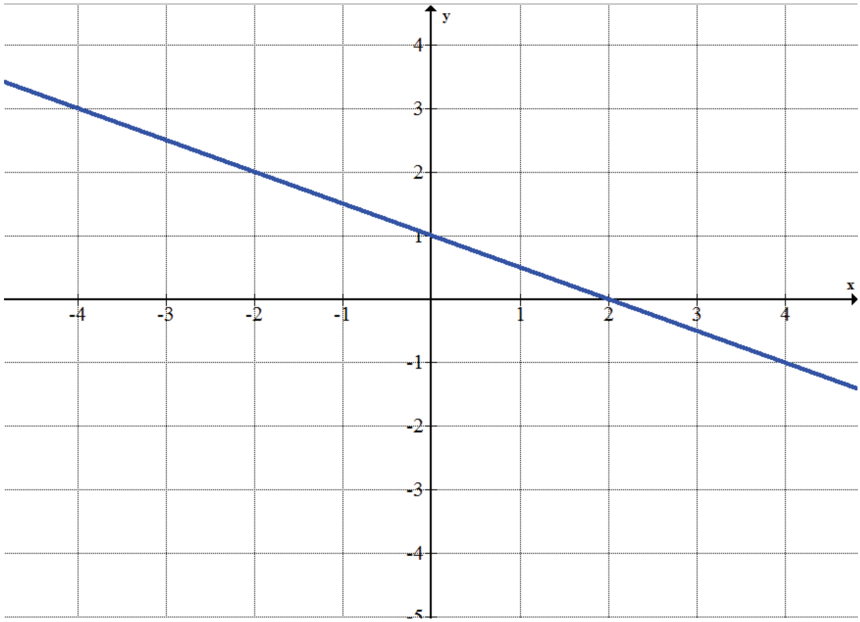


Zauważmy, że z „czerwonego” trójkąta mamy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2} = 2$, czyli współczynnik kierunkowy $a = 2$. W rezultacie równanie naszej prostej przyjmuje postać

$$y = 2x + 1$$

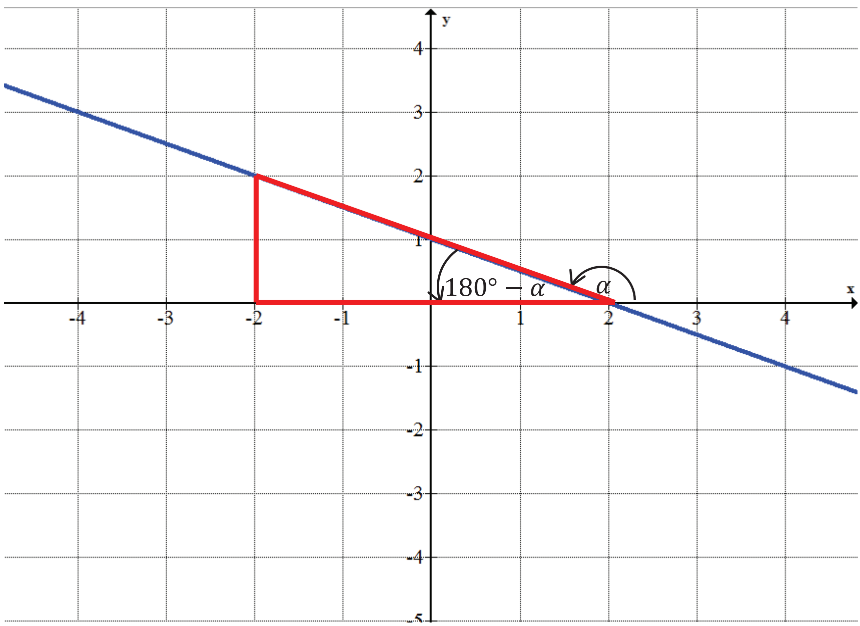
ZADANIE 2.B

Określ współczynnik kierunkowy prostej na podstawie wykresu.



Odpowiedź/wskazówka:

Współczynnik kierunkowy $a = \operatorname{tg} \alpha$



$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Z drugiej strony, ze wzorów redukcyjnych mamy, że $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$.

Zatem

$$-\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$$

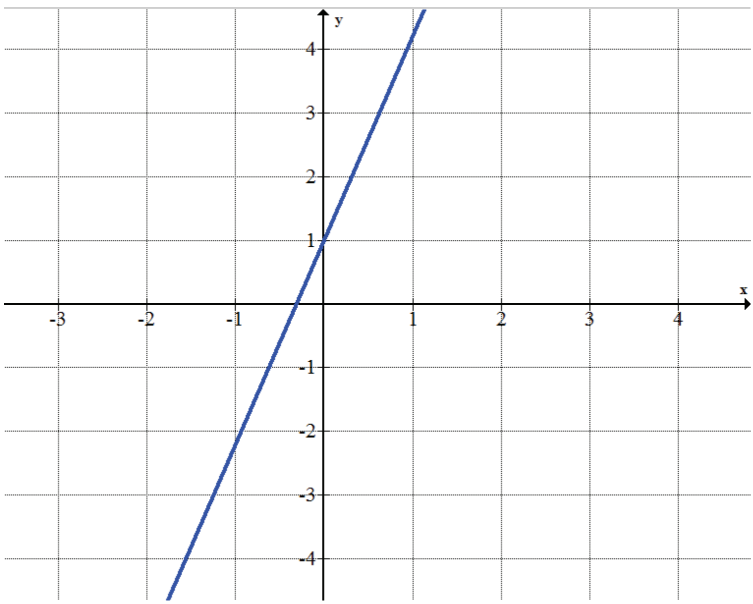
Czyli

$$\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

I tyle wynosi wartość współczynnika kierunkowego naszej prostej.

ZADANIE 2.C

Oszacuj współczynnik kierunkowy prostej na podstawie wykresu.



Odpowiedź/wskazówka:

Współczynnik kierunkowy prostej wynosi w przybliżeniu 3.

Postępujemy analogicznie jak w zadaniach 2A i 2B. Rozważamy tangens kąta α - kąta jaki tworzy nasza prosta z dodatnim zwrotem osi OX.

ZADANIE 3.A

Uzasadnij, że jeśli dla funkcji liniowej $f(x) = f(x+2) + 4$, to współczynnik kierunkowy jest równy -2.

Rozwiązanie:

Niech $f(x) = ax + b$.

$$f(x+2) + 4 = a(x+2) + b + 4$$

Skoro

$$f(x) = f(x+2) + 4$$

to

$$ax + b = a(x+2) + b + 4$$

$$ax + b = ax + 2a + b + 4$$

Traktując powyższą zależność jak równanie, które rozwiązujemy względem a uzyskujemy

$$2a + 4 = 0$$

$$a = -2$$

ZADANIE 3.B

Uzasadnij, że jeśli dla funkcji liniowej zachodzi zależność: $f(x+1) = f(x+2)$, to funkcja jest stała.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $f(x) = ax + b$.

Zatem $f(x+1) = a(x+1) + b$ oraz $f(x+2) = a(x+2) + b$

Skoro $f(x+1) = f(x+2)$, to uzyskujemy

$$a(x+1) + b = a(x+2) + b$$

Czyli

$$ax + a + b = ax + 2a + b$$

Traktując powyższą zależność jak równanie, które rozwiązujemy względem a uzyskujemy

$$a = 2a$$

Zatem

$$a = 0$$

Oznacza to, że funkcja $f(x)$ jest stała.

ZADANIE 3.C

Uzasadnij, że jeśli dla funkcji liniowej zachodzi zależność: $2f(x) = f(2x)$, to funkcja przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $f(x) = ax + b$.

Zatem

$$f(2x) = 2ax + b$$

oraz

$$2f(x) = 2ax + 2b$$

Skoro $f(x) = f(2x)$, to uzyskujemy

$$2ax + b = 2ax + 2b$$

$$b = 2b$$

Traktując powyższą zależność jak równanie, które rozwiązujemy względem b uzyskujemy

$$b = 0$$

Zatem wzór funkcji $f(x)$ uzyskuje postać:

$$f(x) = ax$$

Czyli prosta będąca wykresem funkcji $f(x)$ przechodzi przez początek układu współrzędnych.

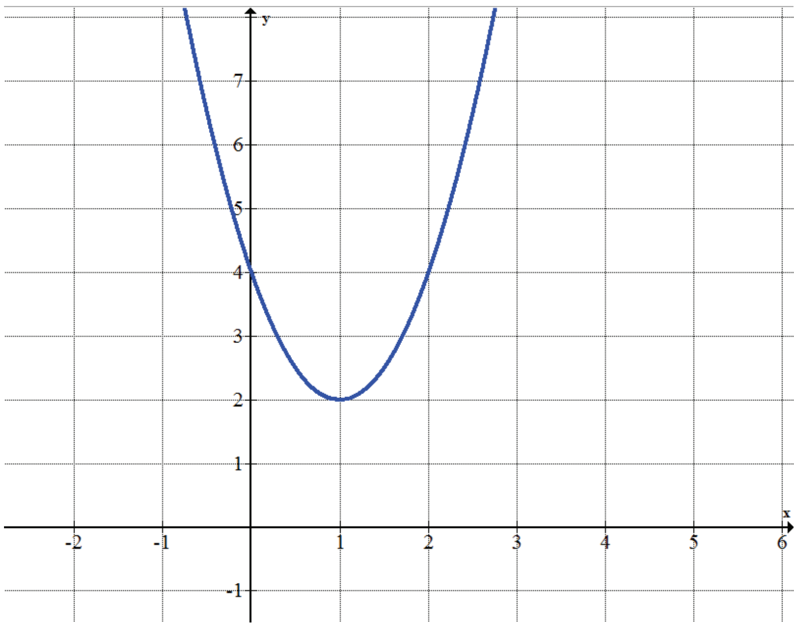
3.3 Funkcja kwadratowa

ZADANIE 1.A

Narysuj wykres funkcji kwadratowej: $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$

Rozwiązanie:

Wzór funkcji kwadratowej podany jest w postaci kanonicznej. Możemy odczytać z niej współrzędne wierzchołka: $W = (1, 2)$. Dodatkowo widzimy, że współczynnik przy x^2 jest dodatni, zatem parabola rozchyla ramiona ku górze. Uwzględniając powyższe informacje uzyskujemy poniższy wykres



ZADANIE 1.B

Przedstaw w postaci kanonicznej funkcję kwadratową: $f(x) = -x^2 + 8x - 12$

Odpowiedź/wskazówka:

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12$$

$$f(x) = -(x^2 - 8\,x + 12)$$

$$f(x) = -((x-4)^2 - 4)$$

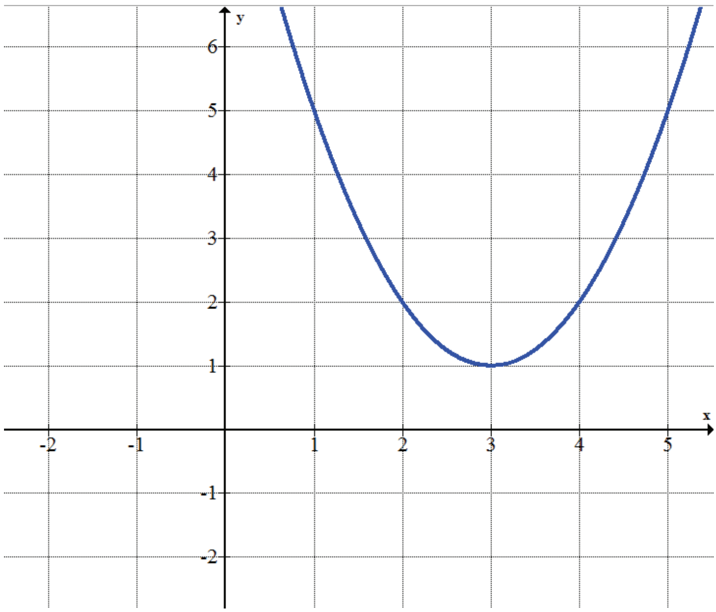
$$f(x) = -((x-4)^2 - 4)$$

$$f(x) = -(x-4)^2 + 4$$

ZADANIE 1.C

Na podstawie wykresu uzupełnij wzór funkcji kwadratowej.

$$f(x) = (x - _{...})^2 + _{...}$$



Odpowiedź/wskazówka:

Wierzchołek paraboli $W(3,1)$. Zatem

$$f(x) = (x-3)^2 + 1.$$

ZADANIE 2.A

Napisz wzór funkcji kwadratowej, której wykres przechodzi przez trzy punkty: $A = (-1,0)$, $B = (1,2)$, $C = (0,0)$.

Rozwiązanie:

Funkcja kwadratowa ogólnie ma postać:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Skoro parabola (wykres funkcji kwadratowej) ma przechodzić przez podane punkty, to współrzędne tych punktów muszą spełniać jej równanie. Podstawiając uzyskujemy układ równań:

$$\begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ a(1)^2 + b(1) + c = 2 \\ a(0)^2 + b(0) + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując układ mamy:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Czyli

$$f(x) = x^2 + x$$

ZADANIE 2.B

Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscem zerowym jest $x = 4$, zaś wierzchołkiem jest punkt $W = (2, -4)$.

Odpowiedź/wskazówka:

Postać kanoniczna:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

gdzie $W(p, q)$ - wierzchołek paraboli.

Skoro $W = (2, -4)$, to wzór przyjmuje postać

$$f(x) = a(x - 2)^2 - 4$$

Miejscem zerowym jest $x = 4$, więc

$$f(4) = 0$$

Czyli

$$a(4 - 2)^2 - 4 = 0$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

ZADANIE 2.C

Znajdź wszystkie wzory funkcji kwadratowych, których miejscami zerowymi są $x = 2$ i $x = 8$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$f(x) = a(x-2)(x-8)$$

gdzie $a \neq 0$

Lub, co na jedno wychodzi:

$$f(x) = a(x^2 - 10\,x + 16)$$

gdzie $a \neq 0$

ZADANIE 3.A

Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej, która ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

Rozwiązanie:

Niech $W = (p, q)$ - wierzchołek paraboli.

Osią symetrii paraboli jest prosta pionowa przechodząca przez jej wierzchołek: $x = p$.

Jeśli x_1, x_2 – miejsca zerowe funkcji kwadratowej, to $p = \frac{x_1+x_2}{2}$ (tzn. jeśli funkcja kwadratowa posiada miejsca zerowe, to pierwsza współrzędna wierzchołka jest zawsze ich średnią arytmetyczną).

Zatem równanie osi symetrii:

$$x = \frac{2+6}{2}$$

Czyli

$$x = 4.$$

ZADANIE 3.B

Oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej. Wyznacz sumę argumentów (o ile istnieją) dla których funkcja przyjmuje wartość 0.

Odpowiedź/wskazówka:

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość zero to miejsca zerowe.

Skoro oś OY jest osią symetrii paraboli, to o ile funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe, to są one liczbami przeciwnymi. Zatem suma miejsc zerowych będzie w takim przypadku równa 0.

ZADANIE 3.C

Prosta $x = 8$ jest osią symetrii funkcji kwadratowej. Wyznacz sumę argumentów (o ile istnieją) dla których funkcja przyjmuje wartość 0.

Odpowiedź/wskazówka:

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość zero to miejsca zerowe. Oznaczmy je x_1, x_2. Wtedy równanie osi symetrii paraboli

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

W warunkach zadania mamy, że $x = 8$. Zatem

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 8$$

Czyli

$$x_1 + x_2 = 16.$$

3.3.1 Równania kwadratowe

ZADANIE 1.A

Rozwiąż równanie: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Rozwiązanie:

$a = 1, b = -7, c = 12$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$

Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{-(-7)-1}{2\cdot 1},\ x_2 = \frac{-(-7)+1}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4$$

Rozwiązaniem równania $x^2 - 7x + 12 = 0$ są liczby $x = 3$, $x = 4$.

ZADANIE 1.B

Rozwiąż równanie: $2x^2 + x + 12 = 0$.

Odpowiedź/wskazówka:

$\Delta < 0$, zatem brak rozwiązań równania w zbiorze liczb rzeczywistych.

ZADANIE 1.C

Rozwiąż równanie:$-x^2 + 12x - 36 = 0$

Odpowiedź/wskazówka:

Rozwiązaniem równania $-x^2 + 12x - 36 = 0$ jest $x = 6$.

Można policzyć deltę ($\Delta = 0$) i skorzystać ze wzoru na rozwiązanie w tym przypadku bądź zauważyć, że lewą stronę równania da się „zwinąć” ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

ZADANIE 2.A

Równanie kwadratowe postaci: $(x-3)^2-4=0$ można rozwiązać następującą metodą:

$(x-3)^2-4=0$

$(x-3)^2=4$

$(x-3)^2=2^2$

Stąd $x-3=2$ lub $x-3=-2$. Przekształcając dostajemy: $x=5$ lub $x=1$.

Postępując analogicznie rozwiąż równanie: $(x-1)^2-9=0$.

Rozwiązanie:

$$(x-1)^2-9=0$$

$$(x-1)^2=9$$

$$(x-1)^2=3^2$$

Stąd $x-1=3$lub $x-1=-3$. Przekształcając dostajemy:

$$x=4 \text{ lub } x=-2$$

ZADANIE 2.B

Postępując analogicznie jak w zadaniu 2A rozwiąż równanie: $(x+1)^2+9=0$

Odpowiedź/wskazówka:

$$(x+1)^2+9=0$$

$$(x+1)^2=-9$$

Żadna liczba rzeczywista NIE spełnia tego równania (kwadrat żadnej liczby rzeczywistej NIE jest liczbą ujemną). Patrząc geometrycznie powiedzielibyśmy: parabola $y=(x+1)^2$ (będąca wykresem lewej strony równania) NIE ma punktów wspólnych z prostą $y=-9$ (będąca wykresem prawej strony równania).

ZADANIE 2.C

Postępując analogicznie jak w zadaniu 2A rozwiąż równanie: $-x^2+4x-3=0$.

Odpowiedź/wskazówka:

Najpierw musimy znaleźć postać kanoniczną funkcji kwadratowej znajdującej się po lewej stronie naszego równania. Wtedy równanie przyjmie postać

$$-(x-2)^2+1=0$$

$$(x-2)^2=1$$

$$x-2=1 \text{ lub } x-2=-1$$

$$x=3 \text{ lub } x=1$$

ZADANIE 3.A

Rozwiąż równanie: $x^4-5x^2+4=0$.

Rozwiązanie:

Jest to tzw. równanie dwukwadratowe. Rozwiązujemy je stosując podstawienie $x^2=t$.

$$t^2-5t+4=0$$

Licząc deltę ($\Delta>0$) i stosując wzory na rozwiązania równania kwadratowego uzyskujemy

$$t=1 \text{ lub } t=4$$

Wracając so podstawienia $x^2=t$ mamy

$$x^2=1 \text{ lub } x^2=4$$

Czyli

$$x=1 \text{ lub } x=-1 \text{ lub } x=2 \text{ lub } x=-2$$

Rozwiązaniem równania $x^4-5x^2+4=0$ są liczby $x=1, x=-1, x=2, x=-2$.

ZADANIE 3.B

Rozwiąż równanie: $x^6-9x^3+8=0$

Odpowiedź/wskazówka:

Równanie to sprowadzimy do równania kwadratowego przez podstawienie: $x^3=t$.

$$t^2-9t+8=0$$

Licząc deltę ($\Delta > 0$) i stosując wzory na rozwiązania równania kwadratowego uzyskujemy

$$t = 1 \text{ lub } t = 8$$

Wracając do podstawienia $x^3 = t$ mamy

$$x^3 = 1 \text{ lub } x^3 = 8$$

Czyli

$$x = 1 \text{ lub } x = 2$$

ZADANIE 3.C

Rozwiąż równanie: $x^{20} + x^{10} + 1 = 0$.

Odpowiedź/wskazówka:

Równanie to sprowadzimy do równania kwadratowego przez podstawienie: $x^{10} = t$.

$$t^2 + t + 1 = 0$$

Okazuje się, że $\Delta < 0$.Zatem równanie $t^2 + t + 1 = 0$ NIE ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Tym samym równanie $x^{20} + x^{10} + 1 = 0$ również NIE posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

3.3.2 Nierówności kwadratowe

ZADANIE 1.A

Rozwiąż nierówność: $-x^2 + 8x - 7 > 0$

Rozwiązanie:

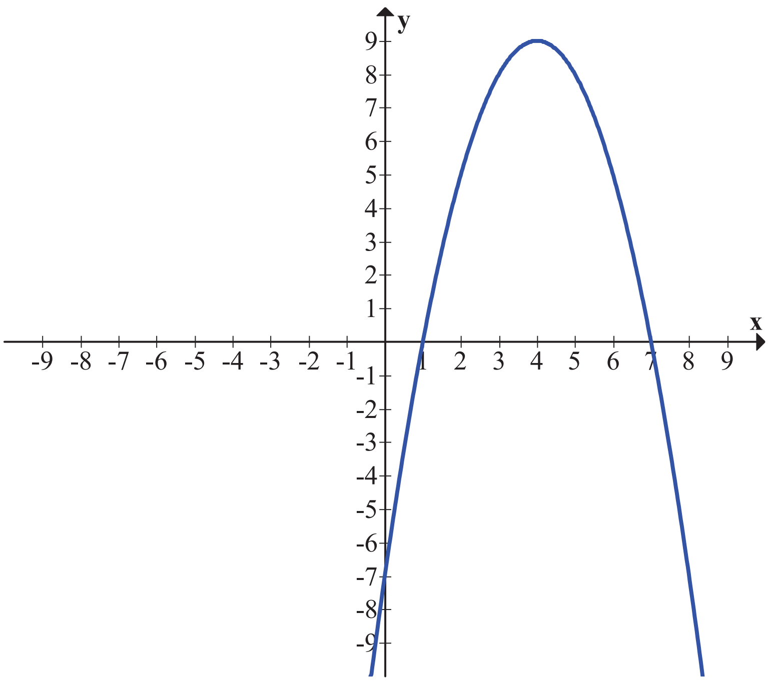
- Najpierw szukamy miejsc zerowych funkcji kwadratowej znajdującej się po lewej stronie nierówności $f(x) = -x^2 + 8x - 7$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 7 = 0$$

Licząc deltę ($\Delta > 0$) i stosując wzory na rozwiązania równania kwadratowego uzyskujemy

$$x = 1 \;\text{ lub } x = 7$$

- Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej znajdującej się po lewej stronie nierówności



- Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności

Rozwiązujemy nierówność $-x^2 + 8x - 7 > 0$ pytamy zatem, kiedy parabola leży powyżej osi OX. Ma to miejsce dla $x \in (1; 7)$.

Nierówność $-x^2 + 8x - 7 > 0$ jest spełniona dla $x \in (1; 7)$.

ZADANIE 1.B

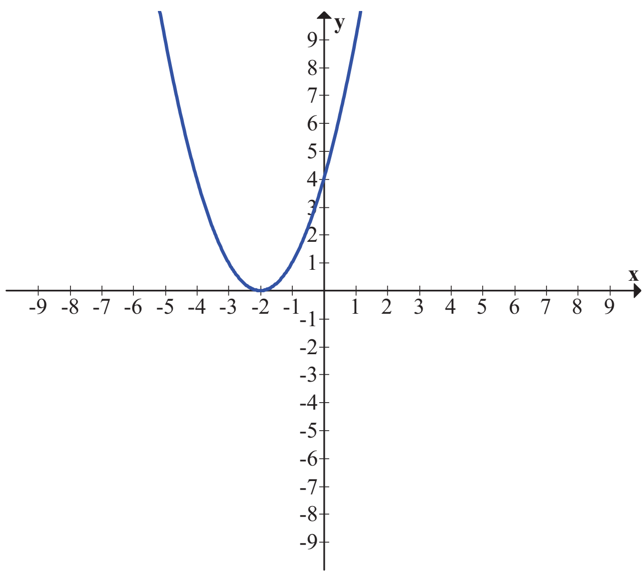
Rozwiąż nierówność: $x^2 + 4x + 4 \leq 0$.

Odpowiedź/wskazówka:

$x = -2$

$$x^2 + 4x + 4 \leq 0$$

$$(x + 2)^2 \leq 0$$



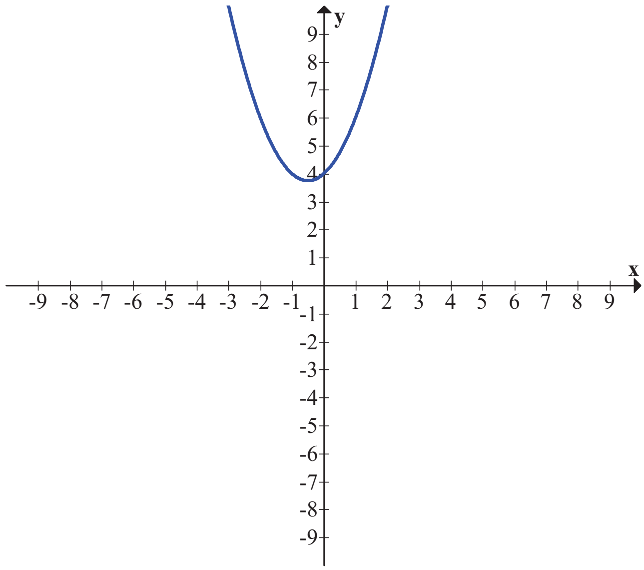
Pytamy, kiedy parabola leży poniżej bądź na osi OX.

ZADANIE 1.C

Rozwiąż nierówność: $x^2 + x + 4 \geq 0$.

Odpowiedź/wskazówka:

$x \in \mathbb{R}$



Pytamy, kiedy parabola leży powyżej bądź na osi OX.

ZADANIE 2.A

Napisz nierówność kwadratową, której rozwiązaniem jest zbiór: $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$.

Rozwiązanie:

Np.

- $(x-2)(x-5) > 0$ lub w postaci rozwiniętej $x^2 - 7\,x + 10 > 0$
- $3(x-2)(x-5) > 0$ lub w postaci rozwiniętej $3\,x^2 - 21\,x + 30 > 0$
- Itd. ogólnie $a(x-2)(x-5) > 0$, gdzie $a > 0$

Bądź:

- $-(x-2)(x-5) < 0$ bądź w postaci rozwiniętej $-x^2 + 7\,x - 10 < 0$
- $-3(x-2)(x-5) > 0$ bądź w postaci rozwiniętej $-3\,x^2 + 21\,x - 30 < 0$
- Itd. ogólnie $a(x-2)(x-5) < 0$, gdzie $a < 0$

ZADANIE 2.B

Napisz nierówność kwadratową, której rozwiązaniem jest zbiór jednoelementowy $\{4\}$.

Odpowiedź/wskazówka:

Np.

- $(x-4)^2 \leq 0$
- Ogólnie: $a(x-4)^2 \leq 0$, gdzie $a > 0$

Bądź

- $-(x-4)^2 \geq 0$
- Ogólnie: $a(x-4)^2 \geq 0$, gdzie $a < 0$

ZADANIE 2.C

Napisz nierówność kwadratową, której rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Odpowiedź/wskazówka:

Np.

- $x^2 + 5 < 0$
- $x^2 + 3x + 20 \leq 0$
- Ogólnie: $ax^2 + bx + c \leq 0$, gdzie $\Delta < 0$ i $a > 0$

Bądź

- $-x^2 - 5 > 0$
- $-x^2 + 3x - 20 \geq 0$
- Ogólnie: $ax^2 + bx + c \geq 0$, gdzie $\Delta < 0$ i $a < 0$

ZADANIE 3.A

Rozwiąż nierówność: $x^{40} + x^{20} + 3 \leq 0$.

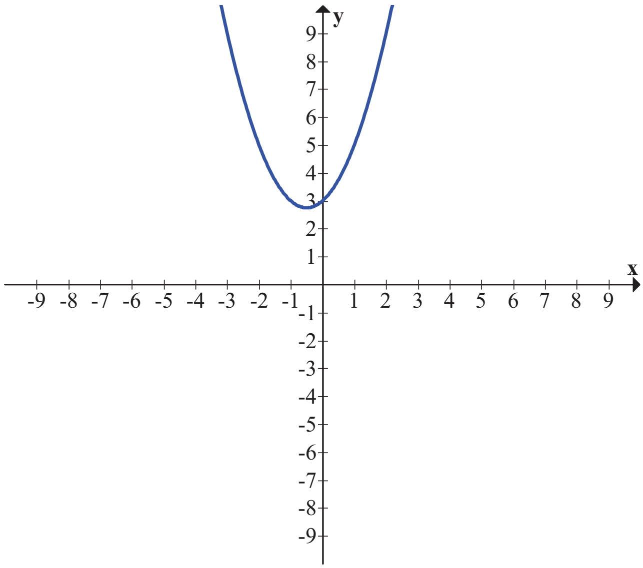
Rozwiązanie:

Nierówność tę sprowadzimy do nierówności kwadratowej przez podstawienie: $x^{20} = t$.

$$t^2 + t + 3 \leq 0$$

$\Delta < 0$, zatem funkcja kwadratowa pomocniczej zmiennej t NIE ma miejsc zerowych.

Szkic wykresu lewej strony nierówności ma postać



Pytamy, kiedy parabola leży poniżej osi OX? Widzimy, że nigdy.

Zatem nierówność $t^2 + t + 3 \leq 0$ jest spełniona dla $t \in \emptyset$.

Tym samym nierówność $x^{40} + x^{20} + 3 \leq 0$ jest spełniona dla $x \in \emptyset$.

<u>Uwaga</u>:

Od razu możemy zauważyć, że żadna liczba rzeczywista NIE spełnia nierówności $x^{40} + x^{20} + 3 \leq 0$, bo po lewej stronie mamy sumę dwóch parzystych potęg zmiennej x (która to suma w zbiorze liczb rzeczywistych zawsze będzie dodatnia bądź równa zero) liczby 3. Pytamy, kiedy taka suma jest mniejsza od zera. Oczywiście nigdy.

ZADANIE 3.B

Rozwiąż nierówność: $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$.

Odpowiedź/wskazówka:

Nierówność tę sprowadzamy do nierówności kwadratowej przez podstawienie: $x^2 = t$.

$$t^2 - 5t + 4 \leq 0$$

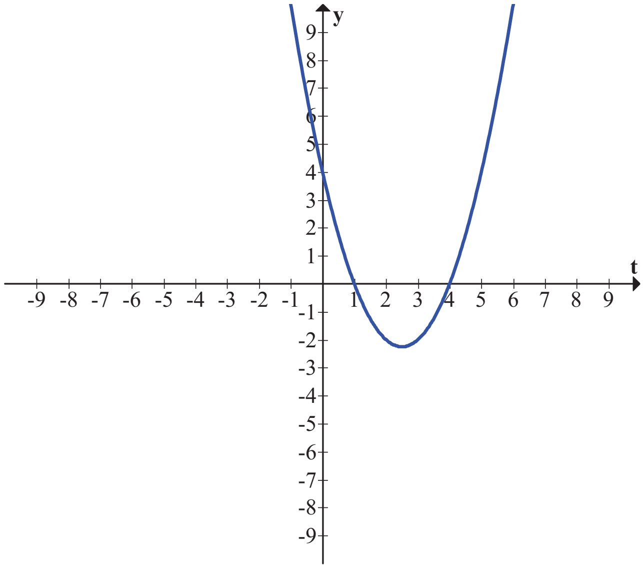
- szukamy miejsc zerowych funkcji kwadratowej znajdującej się po lewej stronie nierówności $f(t) = t^2 - 5t + 4$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

Licząc deltę ($\Delta > 0$) i stosując wzory na rozwiązania równania kwadratowego uzyskujemy

$$t = 1 \text{ lub } t = 4$$

- Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej $f(t)$



- Z wykresu odczytujemy, kiedy spełniona jest nierówność $t^2 - 5t + 4 \leq 0$ (kiedy parabola leży poniżej osi OX bądź ma z nią punkty wspólne).

  Ma to miejsce dla $t \in < 1; 4 >$, czyli wtedy, kiedy t spełnia układ nierówności

$$t \leq 4 \quad \text{i} \quad t \geq 1$$

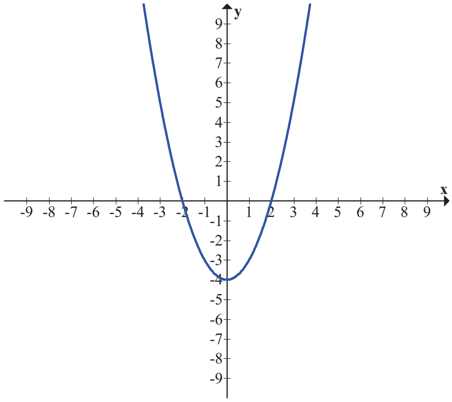
Wracając do podstawienia $x^2 = t$ uzyskujemy

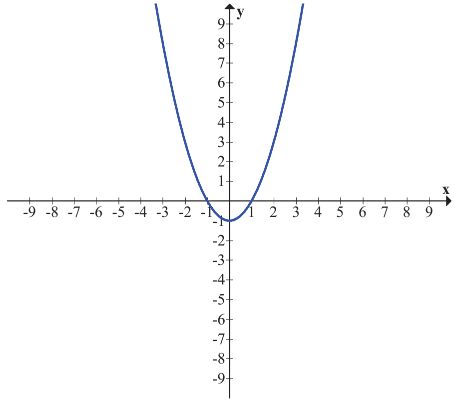
$$x^2 \leq 4 \quad \text{i} \quad x^2 \geq 1$$

Musimy zatem rozwiązać jeszcze układ dwóch nierówności kwadratowych

$$x^2 - 4 \leq 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 1 \geq 0$$

$$(x-2)\,(x+2) \leq 0 \quad \text{i} \quad (x-1)(x+1) \geq 0$$





Pytamy:

kiedy parabola leży poniżej osi OX (lub na osi)? i kiedy parabola leży powyżej osi OX (lub na osi)?

$x \in < -2; 2 >$ i $x \in (-\infty;\ -1 > \cup < 1;\ +\infty)$

Znajdując część wspólną uzyskanych przedziałów uzyskujemy

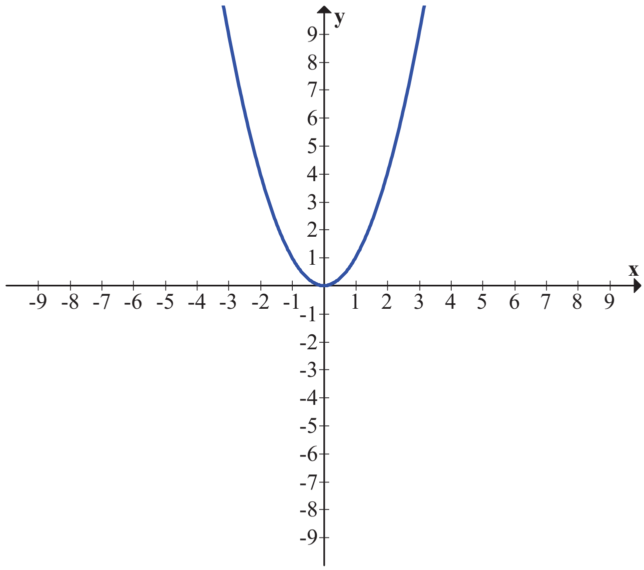
$$x \in < -2;\ -1 > \cup < 1;\ 2 >$$

ZADANIE 3.C

Rozwiąż nierówność: $x^2 \leq 0$.

Rozwiązanie:

Dokonujemy interpretacji geometrycznej nierówności.



Rozwiązując nierówność $x^2 \leq 0$ pytamy, kiedy parabola leży poniżej osi OX bądź na osi OX.

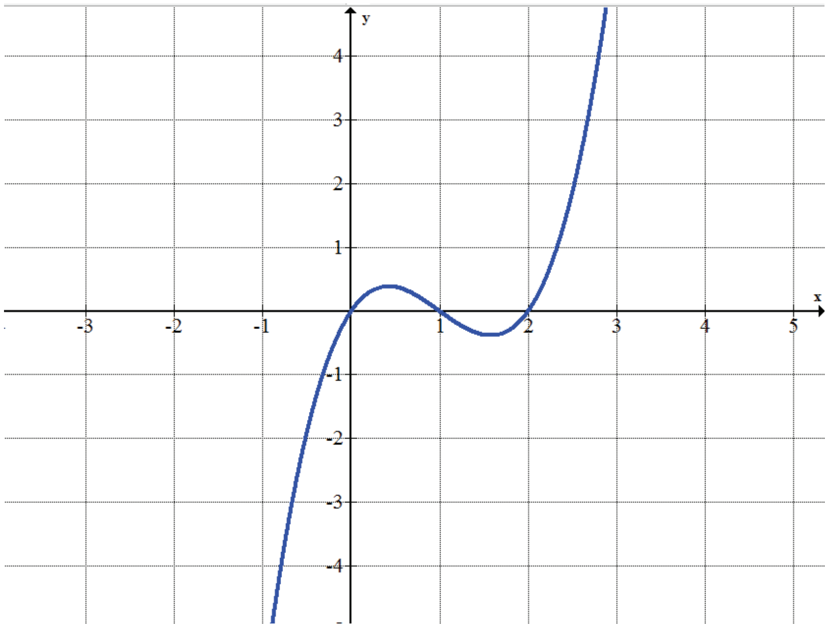
Ma to miejsce tylko dla $x = 0$.

Odpowiedź: Nierówność $x^2 \leq 0$ jest spełniona dla tylko dla $x = 0$.

3.4 Funkcja wielomianowa

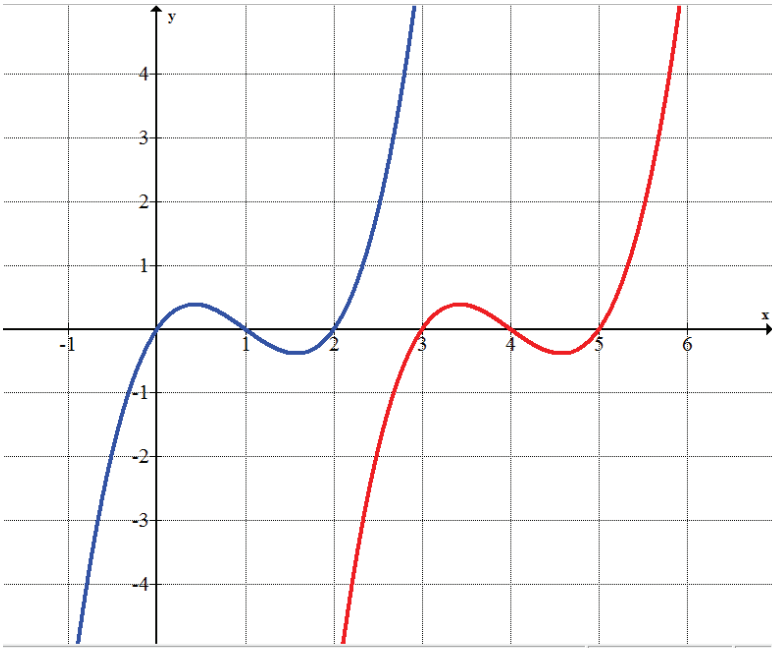
ZADANIE 1.A

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x-3)$.



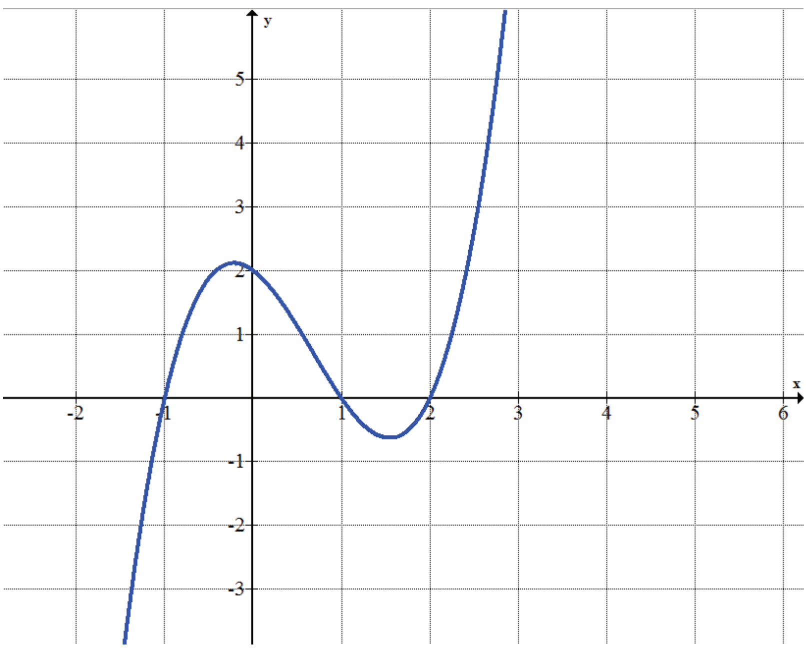
Rozwiązanie:

Wykres funkcji $g(x) = f(x-3)$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez jego przesunięcie o wektor o współrzędnych $[3;\ 0]$ (przesunięcie „w prawo” o trzy jednostki).



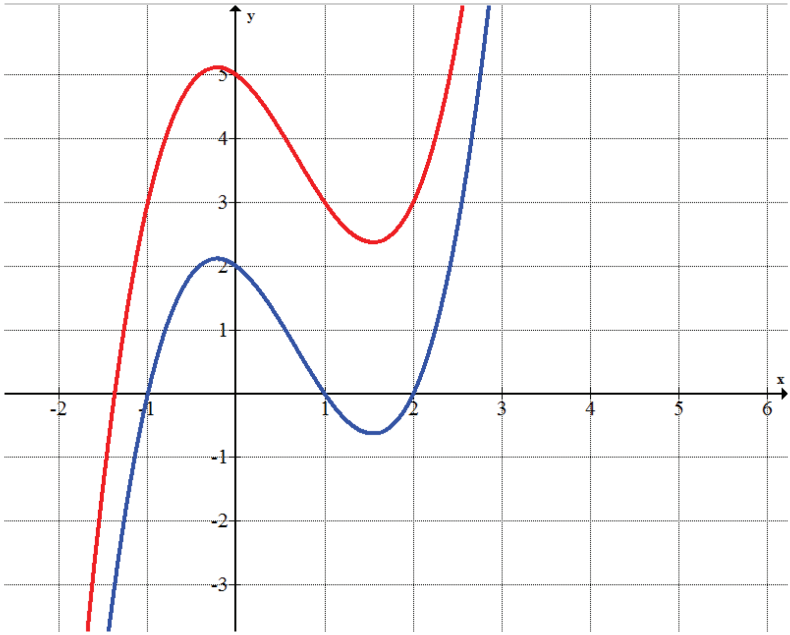
ZADANIE 1.B

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 3$.



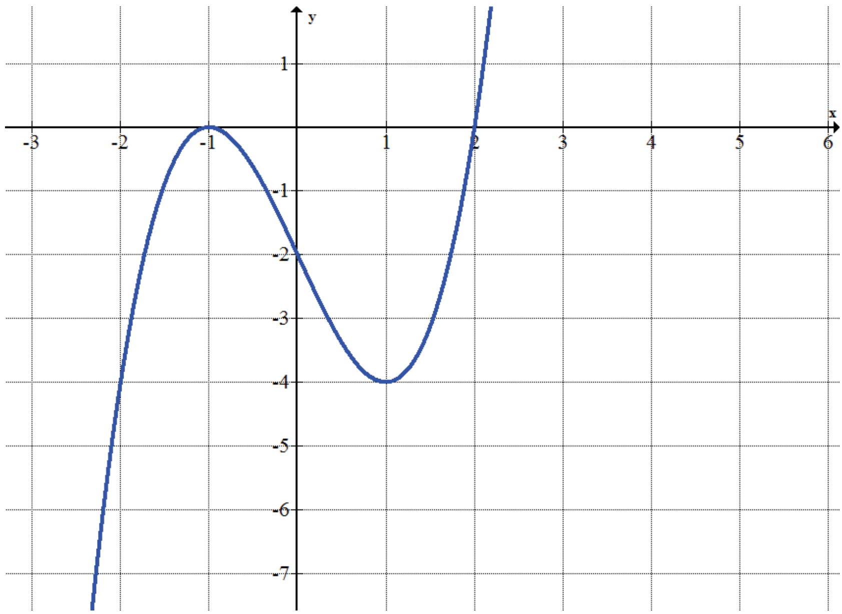
Odpowiedź/wskazówka:

Wykres funkcji $g(x) = f(x) + 3$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez jego przesunięcie o wektor o współrzędnych $[0;\ 3]$ (przesunięcie „w górę" o trzy jednostki).

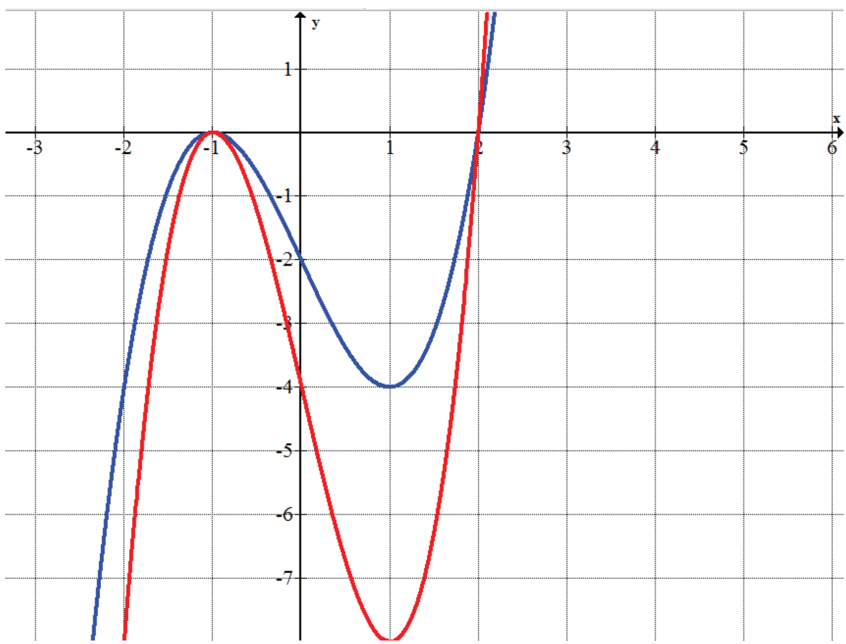


ZADANIE 1.C

Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = (x + 1)(x + 1)(x - 2)$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = 2f(x)$.



Odpowiedź/wskazówka:



ZADANIE 2.A

Dane są dwie funkcje wielomianowe $W(x) = x^4 + x - 1$, $G(x) = x - 1$. Wyznacz wzór funkcji wielomianowej $H(x) = G(x) + 2 \cdot W(x)$.

Rozwiązanie:

$$H(x) = G(x) + 2 \cdot W(x)$$

$$H(x) = x - 1 + 2(x^4 + x - 1)$$

$$H(x) = 2\,x^4 + 3\,x - 3$$

ZADANIE 2.B

Dane są dwie funkcje wielomianowe $W(x) = x^3 + 4x + 2$, $G(x) = x^2 + 1$. Wyznacz wzór funkcji wielomianowej $H(x) = G(x) \cdot W(x)$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$H(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 + 4x + 2)$$

Wymnażając „każdy przez każdy” i porządkując uzyskujemy

$$H(x) = x^5 + 5\,x^3 + 2\,x^2 + 4\,x + 2$$

ZADANIE 2.C

Dane są dwie funkcje wielomianowe $W(x) = x^3 + x$, $G(x) = x^2 + x$. Wyznacz wzór funkcji wielomianowej $H(x) = G(x) + x \cdot W(x)$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$H(x) = G(x) + x \cdot W(x)$$

$$H(x) = (x^2 + x) + x \cdot (x^3 + x)$$

$$H(x) = x^4 + 2\,x^2 + x$$

ZADANIE 3.A

Dana jest funkcja wielomianowa $W(x) = x^4 + 3x^2$. Uzasadnij, że $G(x) = W(x) - W(-x)$ jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

$$G(x) = W(x) - W(-x)$$

$$G(x) = x^4 + 3x^2 - ((-x)^4 + 3(-x)^2)$$

$$G(x) = x^4 + 3x^2 - (x^4 + 3x^2)$$

$$G(x) = 0 \text{ - funkcja stała}$$

ZADANIE 3.B

Dana jest funkcja wielomianowa $W(x) = x^5 + 3x^3$+1. Uzasadnij, że $G(x) = W(x) + W(-x)$ jest funkcją stałą.

Odpowiedź/wskazówka:

$$G(x) = x^5 + 3x^3 + 1 + (-x)^5 + 3(-x)^3 + 1$$

$$G(x) = x^5 + 3x^3 + 1 - x^5 - 3x^3 + 1$$

$$G(x) = 2$$

ZADANIE 3.C

Podaj przykład miejsca zerowego funkcji wielomianowej $W(x) = x^{2n+2} + 3x^3 + 2$, dla $n \in N$.

Odpowiedź/wskazówka:

Dzielniki wyrazu wolnego: $1, -1, 2, -2$.

Sprawdźmy: $W(-1) = (-1)^{2n+2} + 3(-1)^3 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

Zatem -1 jest miejscem zerowym danej funkcji wielomianowej.

3.4.1 Równania wielomianowe

ZADANIE 1.A

Rozwiąż równanie: $(x-2)(x+3)x=0$

Rozwiązanie:

$$(x-2)(x+3)x=0$$

Iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy kiedy przynajmniej jeden z czynników jest równy zero.

$$x-2=0 \text{ lub } x+3=0 \text{ lub } x=0$$

$$x=2 \text{ lub } x=-3 \text{ lub } x=0$$

ZADANIE 1.B

Rozwiąż równanie: $(x+2)^2(x-3)=0$

Odpowiedź/wskazówka:

$x=-2 \text{ lub } x=3$

W związku z faktem, że rozwiązanie $x=-2$ pochodzi z czynnika $(x+2)^2$, to mówimy, że $x=-2$ jest pierwiastkiem 2-krotnym wielomianu znajdującego się po lewej stronie naszego równania.

ZADANIE 1.C

Rozwiąż równanie: $(x+6)^3(-x-1)(x^3-125)=0$

Odpowiedź/wskazówka:

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę i dodatkowo wyłączamy minus poza nawias

$$-(x+6)^3(x+1)(x-5)\ \ (x^2+5\,x+25)=0$$

$$x=-6 \text{ lub } x=-1 \text{ lub } x=5$$

W związku z faktem, że rozwiązanie $x=-6$ pochodzi z czynnika $(x+6)^3$, to mówimy, że $x=-6$ jest pierwiastkiem 3-krotnym wielomianu znajdującego się po lewej stronie naszego równania.

ZADANIE 2.A

Napisz równanie wielomianowe stopnia trzeciego, którego rozwiązaniem jest $x = 3$.

Rozwiązanie:

Np.

- $(x-3)^3 = 0$
- $2(x-3)^3 = 0$
- Ogólnie: $a(x-3)^3 = 0$, gdzie $a \neq 0$.

ZADANIE 2.B

Napisz równanie wielomianowe stopnia czwartego, którego rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Odpowiedź/wskazówka:

Np.

- $x^4 + 5 = 0$
- $-x^4 - 6 = 0$
- $x^4 + 2x^2 + 10 = 0$
- Itp.

Spróbuj podać ogólną postać równania o własności opisanej w zadaniu.

ZADANIE 2.C

Napisz równanie wielomianowe stopnia trzeciego, którego rozwiązaniem jest $x = 1, x = 2, x = 3$.

Odpowiedź/wskazówka:

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

Ogólnie: $a(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, gdzie $a \neq 0$.

ZADANIE 3.A

Uzasadnij, że równanie wielomianowe trzeciego stopnia ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie:

Zbiorem wartości funkcji wielomianowej trzeciego stopnia są wszystkie liczby rzeczywiste. Zatem istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

ZADANIE 3.B

Uzasadnij, że równanie $x^8 + 3x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań.

Odpowiedź/wskazówka:

Zauważmy, że:

- $x^8 \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
- $3x^2 \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
- $1 > 0$

Zatem suma składników powyższej postaci jest dodatnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Nigdy NIE jest zatem równa zero. Czyli równanie $x^8 + 3x^2 + 1 = 0$ NIE ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

ZADANIE 3.C

Uzasadnij, że równanie $20x^{20} + 16x^{16} + x^2 - 37 = 0$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

Odpowiedź/wskazówka:

Wprowadźmy oznaczenie:

$$W(x) = 20x^{20} + 16x^{16} + x^2 - 37$$

Dzielniki wyrazu wolnego: $1, -1, 37, -37$.

Sprawdźmy:

$W(-1) = 20(-1)^{20} + 16(-1)^{16} + (-1)^2 - 37 = 20 + 16 + 1 - 37 = 0.$

Zatem -1 jest miejscem zerowym funkcji wielomianowej $W(x)$.

$W(1) = 20 + 16 + 1 - 37 = 0.$

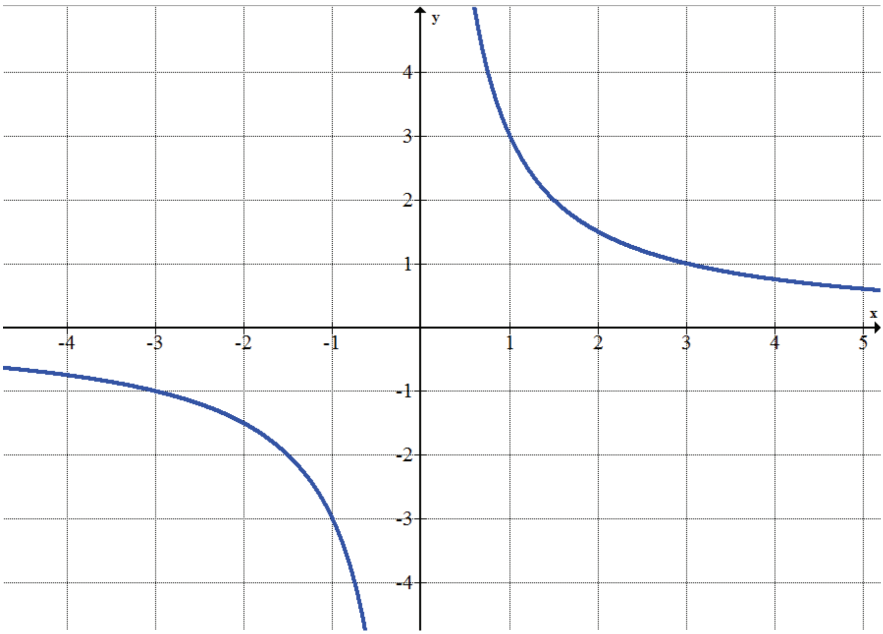
Zatem również 1 jest miejscem zerowym funkcji wielomianowej $W(x)$.

Czyli równanie $20x^{20} + 16x^{16} + x^2 - 37 = 0$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

3.5 Funkcja wymierna

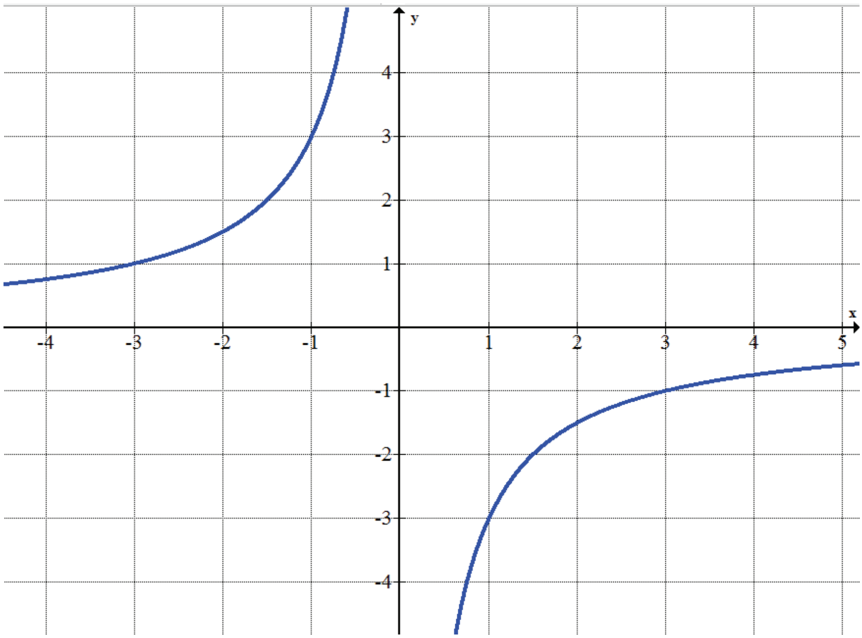
ZADANIE 1.A

Na rysunku naszkicowana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{3}{x}$ dla $x \neq 0$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.



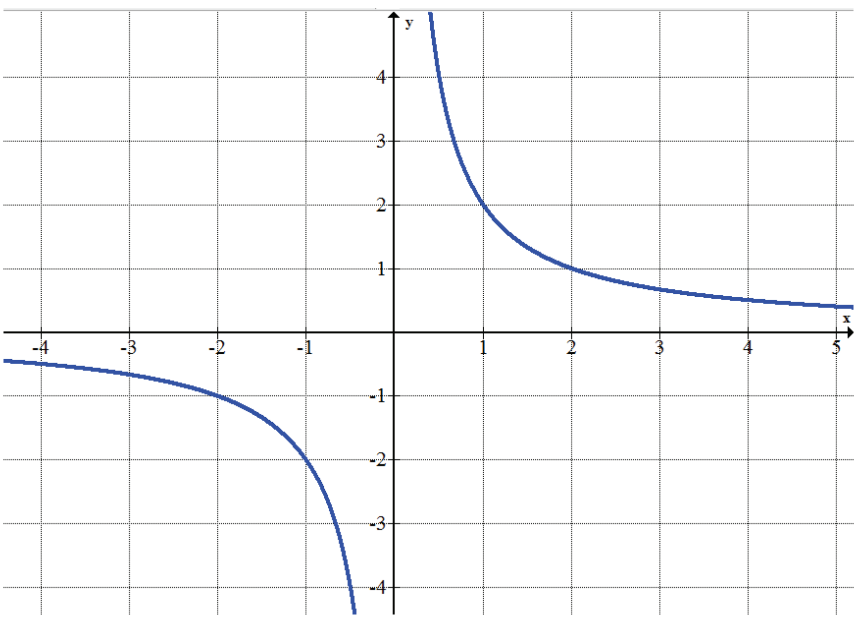
Rozwiązanie:

Wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez symetrię osiową względem osi OY (lustrzane odbicie względem osi OY).



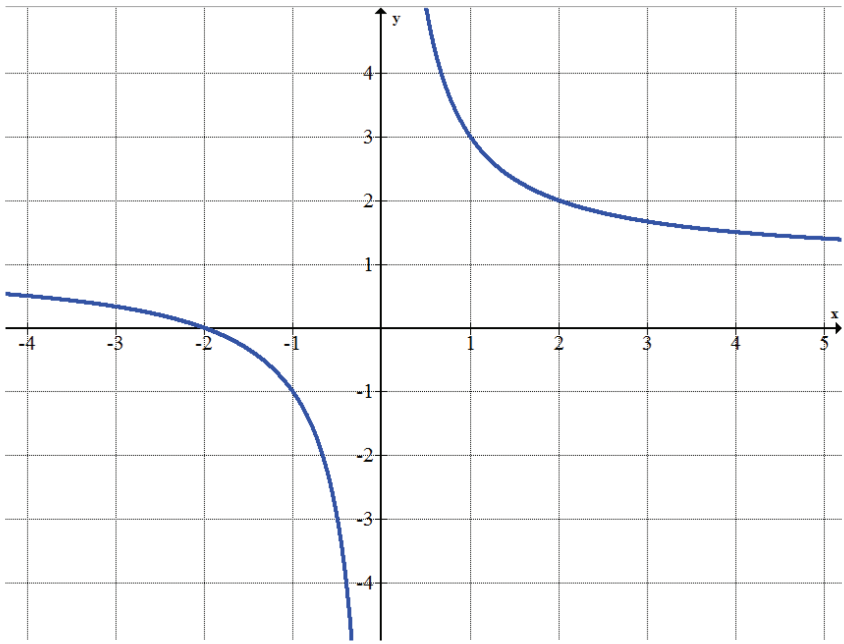
ZADANIE 1.B

Na rysunku naszkicowana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{2}{x}$ dla $x \neq 0$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) + 1$.



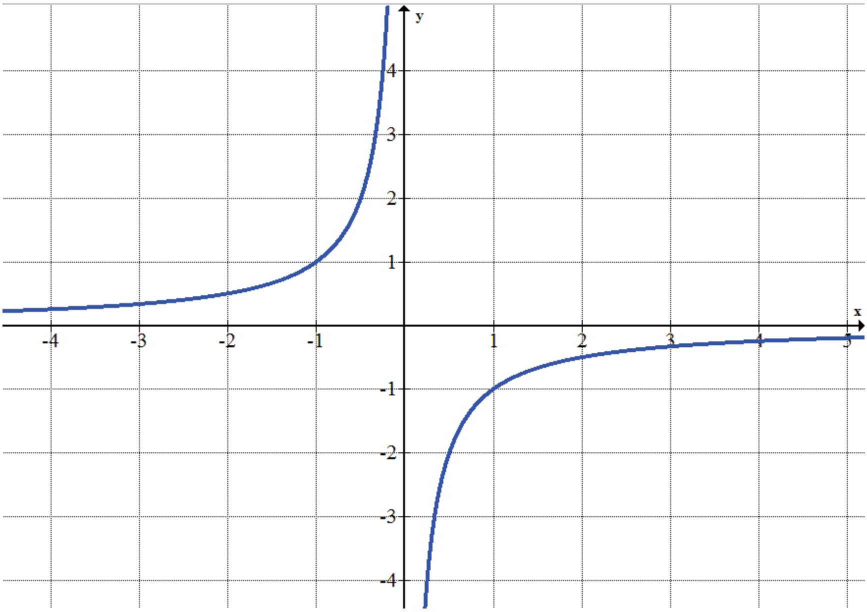
Odpowiedź/wskazówka:

Wykres funkcji $g(x) = f(x) + 1$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez jego przesunięcie o wektor $[0; 1]$ (przesunięcie o jedną jednostkę w górę).



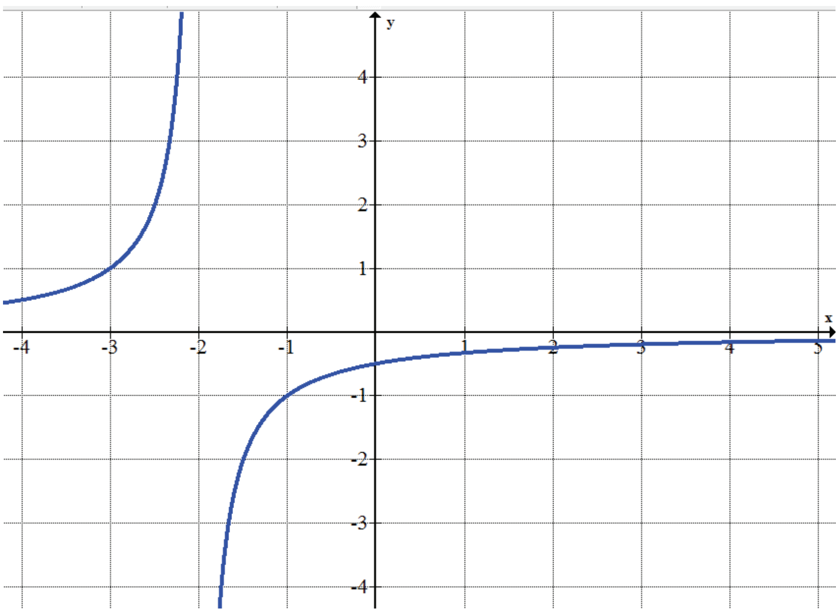
ZADANIE 1.C

Na rysunku naszkicowana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{-1}{x}$ dla $x \neq 0$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 2)$.



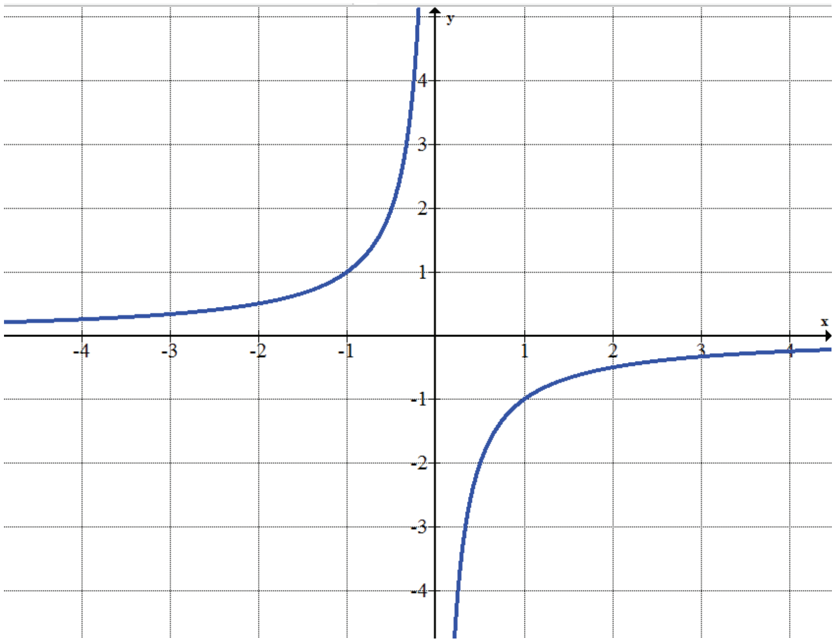
Odpowiedź/wskazówka:

Wykres funkcji $g(x) = f(x+2)$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez jego przesunięcie o wektor $[-2;\, 0]$ (przesunięcie o dwie jednostki w lewo).



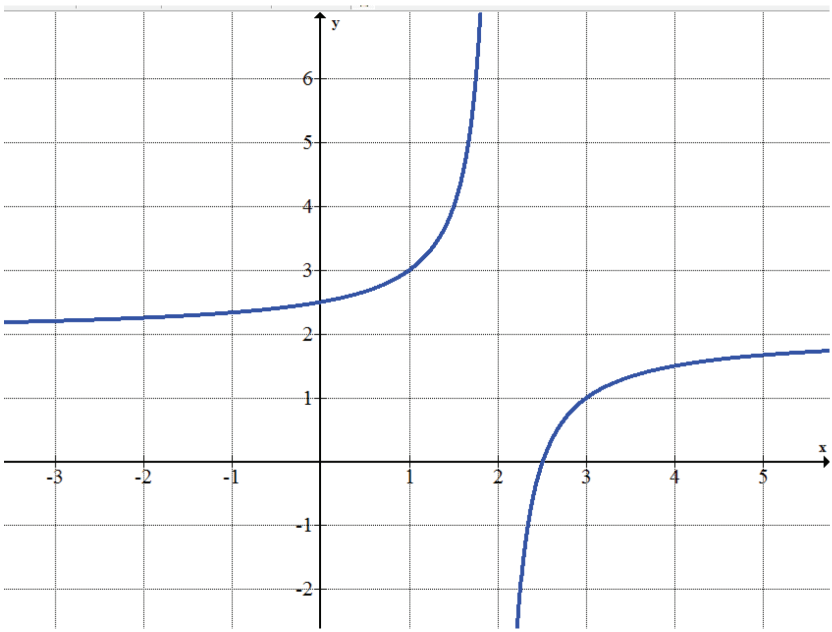
ZADANIE 2.A

Dana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{-1}{x}$ dla $x \neq 0$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x-2) + 2$.



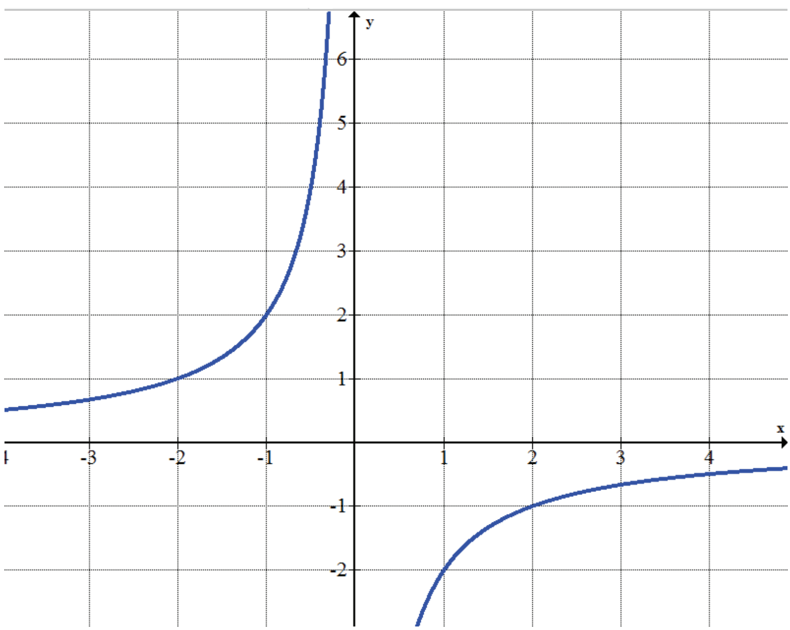
Rozwiązanie:

Wykres funkcji $g(x) = f(x-2) + 2$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez jego przesunięcie o wektor $[2; 2]$ (przesunięcie o dwie jednostki w prawo i dwie do góry).



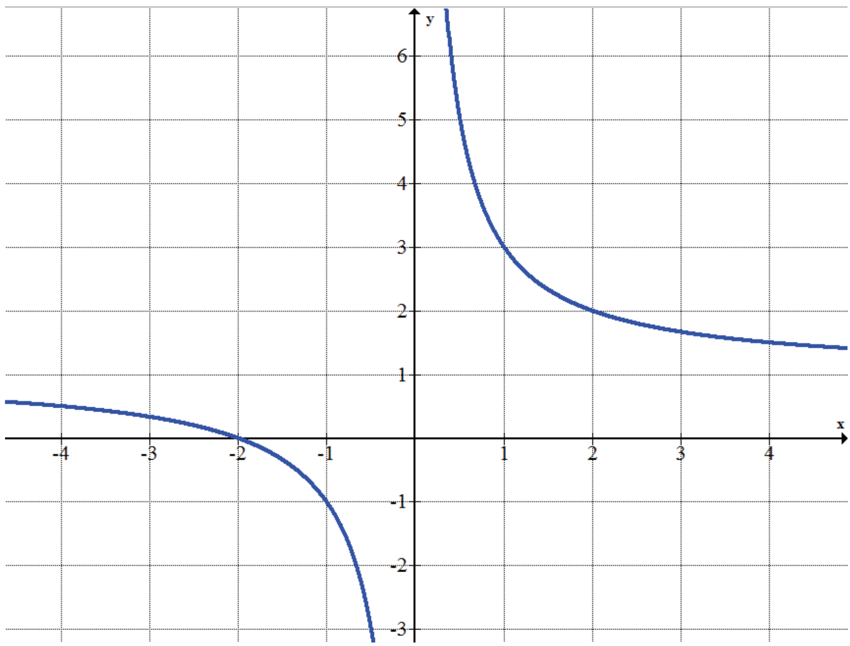
ZADANIE 2.B

Dana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{-2}{x}$ dla $x \neq 0$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x) + 1$.



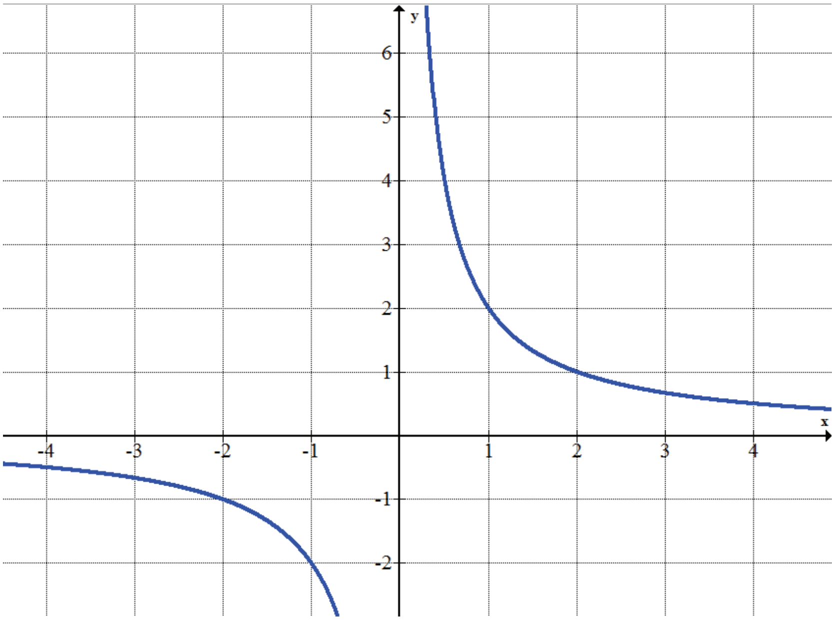
Rozwiązanie:

Wykres funkcji $g(x) = f(-x) + 1$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez symetrię osiową względem osi OY (lustrzane odbicie względem osi OY) oraz przesunięcie o wektor $[0; 1]$ (przesunięcie o jedną jednostkę w górę).



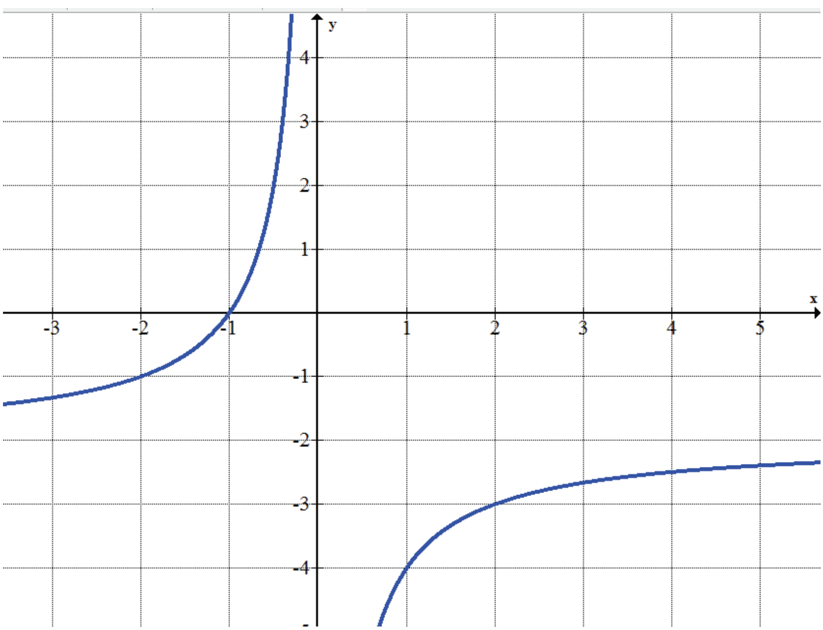
ZADANIE 2.C

Dana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{2}{x}$ dla $x \neq 0$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x) - 2$.



Rozwiązanie:

Wykres funkcji $g(x) = -f(x) - 2$ uzyskamy z wykresu funkcji $f(x)$ przez symetrię osiową względem osi OX (lustrzane odbicie względem osi OX) oraz przesunięcie o wektor $[0; -2]$ (przesunięcie o dwie jednostki w dół).



ZADANIE 3.A

Dane są funkcje wymierne $f(x) = \frac{2}{x}$, dla $x \neq 0$ i $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$,dla $x \neq 1$. Uzupełnij wzór funkcji $g(x) = f(x - \cdots.) + \cdots$..

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wzór opisujący funkcję $g(x)$ możemy przekształcić w następujący sposób

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Czyli

$$g(x) = \frac{2}{x-1} + 1$$

Skoro

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

to

$$g(x) = f(x-1) + 1.$$

ZADANIE 3.B

Dane są funkcje wymierne $f(x) = \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$ i $g(x) = \frac{x-1}{x}$,dla $x \neq 0$. Uzupełnij funkcji $g(x) = f(-x) + \cdots$..

Odpowiedź/wskazówka:

Zauważmy, że wzór opisujący funkcję $g(x)$ możemy przekształcić w następujący sposób

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Czyli

$$g(x) = -\frac{1}{x} + 1$$

Skoro

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

to

$$g(x) = f(-x) + 1.$$

ZADANIE 3.C

Dane są funkcje wymierne $f(x)=\frac{3}{x}$, dla $x\neq 0$ i $g(x)=\frac{-3}{x}$,dla $x\neq 0$. Uzupełnij wzór funkcji $g(x)=-f(x)+\cdots$..

Odpowiedź/wskazówka:

Postępując analogicznie jak w 3A,3B uzyskujemy

$$g(x)=-f(x)+0$$

Czyli krótko:

$$g(x)=-f(x)$$

3.5.1 Równania wymierne

ZADANIE 1.A

Rozwiąż równanie: $\frac{2x}{x+5} = 1$.

Rozwiązanie:

Dziedzina: $x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$ - mianownik musi być różny od zera

$$D = \mathbb{R} \backslash \{-5\}$$

Pierwszy sposób

Przenosimy wszystko na lewą stronę i sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x+5}{x+5} = 0$$

$$\frac{x-5}{x+5} = 0$$

Ułamek jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jego licznik równa się zero

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Zauważmy, że $x = 5 \in D$.

Drugi sposób

Po wyznaczeniu dziedziny D, dla $x \in D$ mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik

$$\frac{2x}{x+5} = 1 \,|\cdot (x+5)$$

$$2x = x + 5$$

$$x = 5 \in D$$

ZADANIE 1.B

Rozwiąż równanie: $\frac{2x+1}{x} = \frac{x+5}{2x}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x = 1$

Postępujemy analogicznie jak w 1A.

ZADANIE 1.C

Rozwiąż równanie: $\frac{x^2-6}{x-3} = 2$

Odpowiedź/wskazówka:

$D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$x = 0\,, x = 2.$

Postępujemy analogicznie jak w 1A.

ZADANIE 2.A

Rozwiąż równanie: $\frac{(x-2)^7}{x-2} = 0.$

Rozwiązanie:

Dziedzina: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

<u>Pierwszy sposób:</u>

Ułamek jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jego licznik równa się zero

$$(x-2)^7 = 0$$

$$x = 2 \notin D$$

Zatem równanie $\frac{(x-2)^7}{x-2} = 0$ NIE ma rozwiązania.

<u>Drugi sposób:</u>

Po wyznaczeniu dziedziny zwracamy uwagę, że mianownik można skrócić z czynnikiem z licznika

$$\frac{(x-2)^7}{x-2}=0$$

$$(x-2)^6=0$$

$$x=2\notin D$$

Zatem równanie $\frac{(x-2)^7}{x-2}=0$ NIE ma rozwiązania.

ZADANIE 2.B

Rozwiąż równanie: $\frac{x^2-9}{x-3}=0$.

Odpowiedź/wskazówka:

$D=\mathbb{R}\backslash\{3\}$

$x=-3$

Postępujemy analogicznie jak w 2A. Zwróćmy uwagę, że licznik można rozłożyć na czynniki korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

ZADANIE 2.C

Rozwiąż równanie: $\frac{x^{10}-7x^7+4}{x^{10}-7x^7+4}=0$.

Odpowiedź/wskazówka:

Równanie sprzeczne – brak rozwiązań.

Zauważmy, że po lewej stronie równania licznik jest taki sam jak mianownik (czyli w rezultacie 1) a po prawej stronie mamy 0.

ZADANIE 3.A

Rozwiąż równanie: $\frac{x-9}{x-3}+\frac{9}{x^2-9}=2$.

Rozwiązanie:

Dziedzina:

$$x-3\neq 0 \text{ i } x^2-9\neq 0$$

$$x-3 \neq 0 \text{ i } (x-3)(x+3) \neq 0$$

$$x \neq 3 \text{ i } x \neq -3$$

$D = \mathbb{R} \backslash \{-3, 3\}$

Mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik:

$$\frac{x-9}{x-3} + \frac{9}{(x-3)(x+3)} = 2 \mid \cdot (x-3)(x+3)$$

$$(x-9)(x+3) + 9 = 2(x-3)(x+3)$$

$$x^2 - 6\,x - 18 = 2\,x^2 - 18$$

$$x^2 + 6\,x = 0$$

$$x\,(x+6) = 0$$

$$x = 0 \ \text{ lub } \ x = -6$$

Zauważmy, że oba uzyskane rozwiązania należą do dziedziny równania.

ZADANIE 3.B

Rozwiąż równanie: $\frac{x+3}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{3}{x} = 0.$

Odpowiedź/wskazówka:

$D = \mathbb{R} \backslash \{-2, -1, 0\}$

$x = 1, \qquad x = -\sqrt{3} - 3, \qquad x = \sqrt{3} - 3$

ZADANIE 3.C

Rozwiąż równanie: $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x+1}{x^2-3x+2}.$

Odpowiedź/wskazówka:

Dziedzina:
$x \neq 1 \text{ i } x \neq 2 \text{ i } x^2 - 3x + 2 \neq 0$

$D = \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$

Równanie sprzeczne – brak rozwiązań.

Technika rozwiązania – jak w poprzednich zadaniach.

3.6 Proporcjonalność odwrotna

ZADANIE 1.A

Uzupełnij tabelę wiedząc, że dane są odwrotnie proporcjonalne.

Wielkość dana	4	6	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	
Wielkość odwrotnie proporcjonalna	$\frac{1}{2}$				4

Rozwiązanie:

Oznaczmy

- wielkości dane (pierwszy wiersz tabeli) przez x
- wielkości odwrotnie proporcjonalne (drugi wiersz tabeli) przez y

Skoro x i y są odwrotnie proporcjonalne tzn., że ich iloczyn jest stały – równy np. $a \neq 0$.

$$x \cdot y = a$$

Z pierwszej kolumny tabeli wynika, że $a = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Czyli między x a y mamy zależność

$$x \cdot y = 2$$

Zatem uzyskujemy, że $y = \frac{2}{x}$, zaś $x = \frac{2}{y}$.

Dbając o spełnienie powyższych zależności uzupełniamy tabelę

Wielkość dana	4	6	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Wielkość odwrotnie proporcjonalna	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	6	4

ZADANIE 1.B

Na podstawie tabeli wyznacz współczynnik proporcjonalności.

Wielkość dana	3	6
Wielkość odwrotnie proporcjonalna	4	2

Odpowiedź/wskazówka:

Oznaczmy

- wielkości dane (pierwszy wiersz tabeli) przez x
- wielkości odwrotnie proporcjonalne (drugi wiersz tabeli) przez y

Skoro x i y są odwrotnie proporcjonalne tzn., że ich iloczyn jest stały – równy np. $a \neq 0$ (a - współczynnik proporcjonalności):

$$x \cdot y = a$$

Nietrudno zauważyć, że w naszym przypadku $a = 12$.

ZADANIE 1.C

Napisz kilka par liczb odwrotnie proporcjonalnych o współczynniku proporcjonalności $\frac{3}{4}$.

Odpowiedź/wskazówka:

Uwagi odnośnie wielkości odwrotnie proporcjonalnych – patrz 1B.

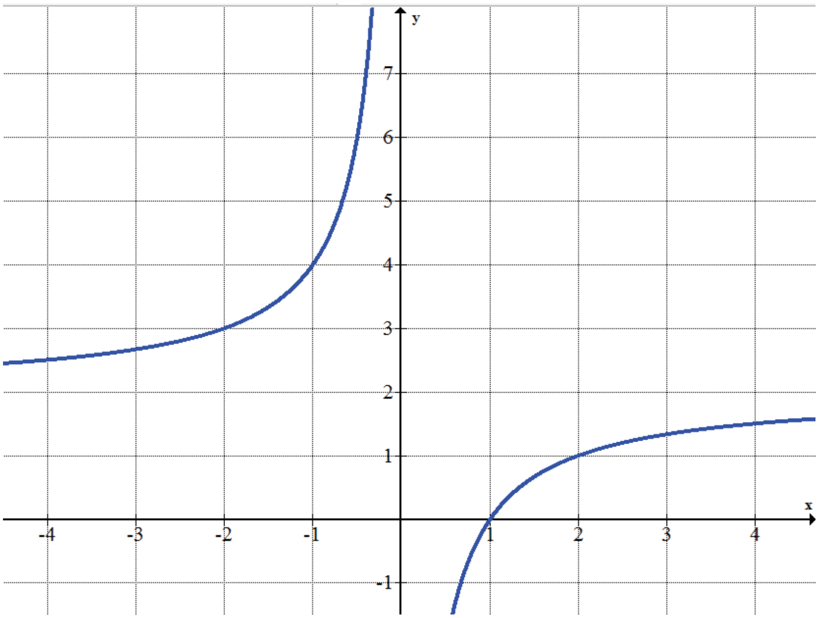
$$x \cdot y = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4x} \text{ i } x \neq 0.$$

Np.

- $x = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$
- $x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{8}$
- $x = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- $x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 3$
- Itd.

ZADANIE 2.A

Czy poniższy wykres funkcji przedstawia proporcjonalność odwrotną? Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie:

Wielkości x, y są odwrotnie proporcjonalne jeżeli ich iloczyn stały

$$x \cdot y = a$$

gdzie $a \neq 0$.

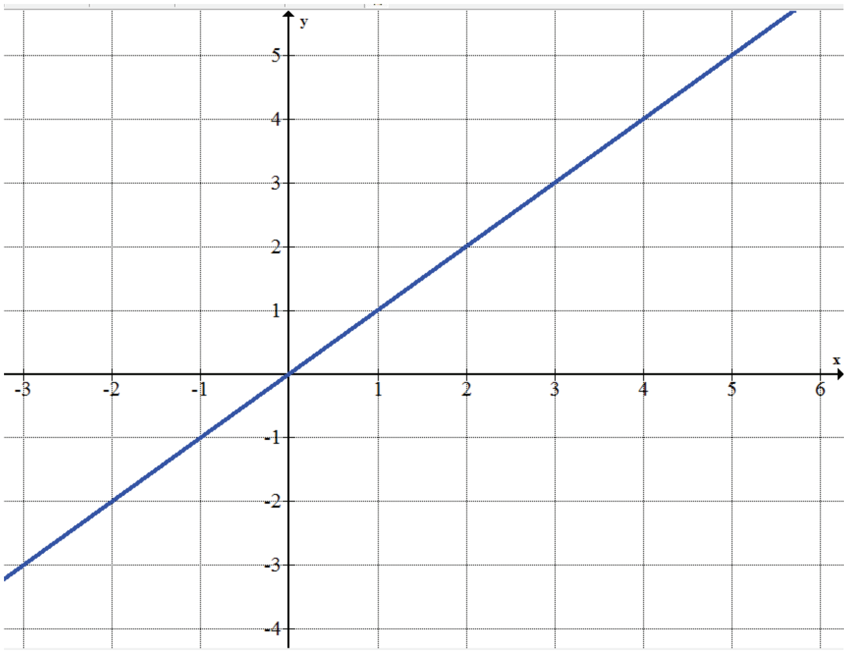
Widzimy, że do naszego wykresu należą m. in. punkty o współrzędnych: $(-2, 3)$ oraz $(-1, 4)$.

- $(-2, 3) \Rightarrow \; x \cdot y = (-2) \cdot 3 = -6$
- $(-1, 4) \Rightarrow \; x \cdot y = (-1) \cdot 4 = -4$

Zatem iloczyn NIE jest stały. Czyli wykres NIE przedstawia proporcjonalności odwrotnej.

ZADANIE 2.B

Czy poniższy wykres funkcji przedstawia proporcjonalność odwrotną? Odpowiedź uzasadnij.



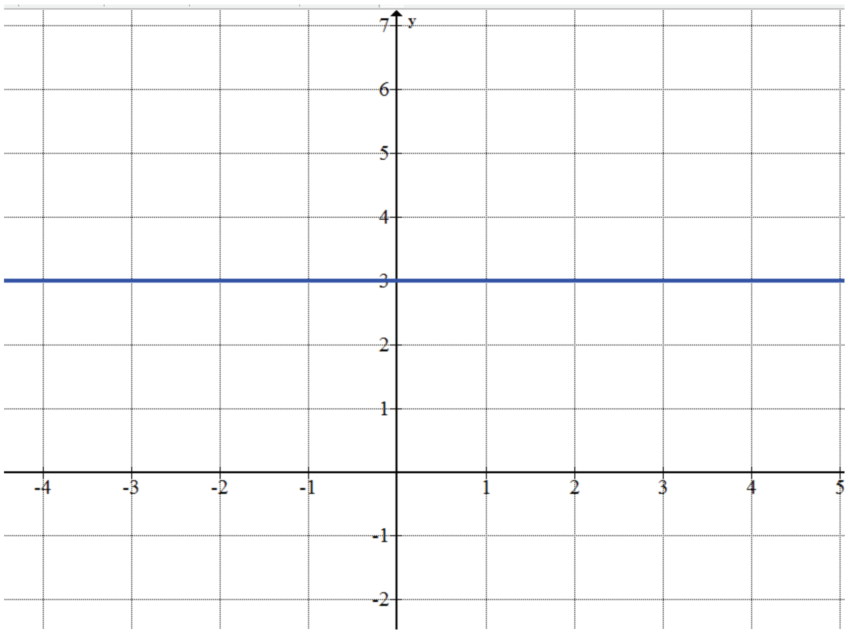
Odpowiedź/wskazówka:

Wykres NIE przedstawia proporcjonalności odwrotnej.

Uzasadnienie analogiczne jak w zadaniu 2A.

ZADANIE 2.C

Czy poniższy wykres funkcji przedstawia proporcjonalność odwrotną? Odpowiedź uzasadnij.



Odpowiedź/wskazówka:

Wykres NIE przedstawia proporcjonalności odwrotnej.

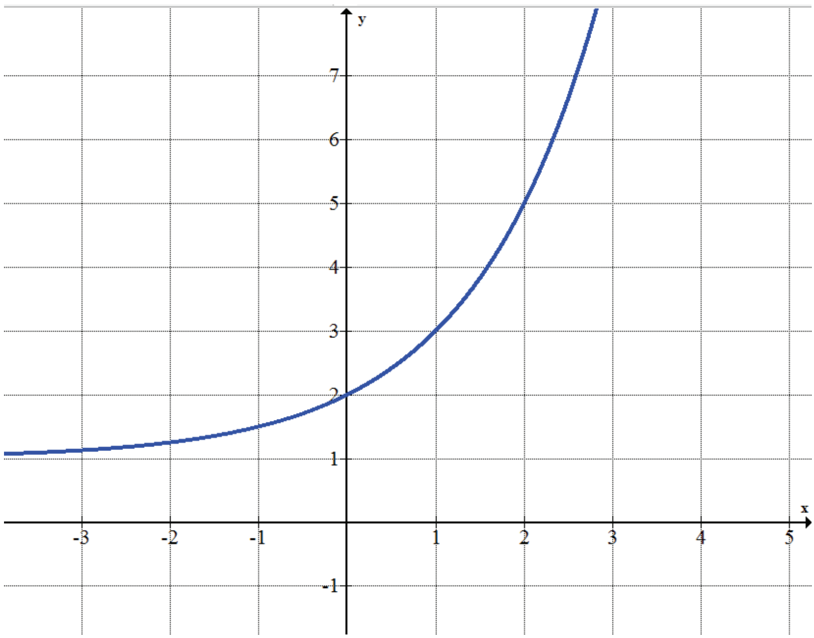
Uzasadnienie analogiczne jak w zadaniu 2A.

3.7 Funkcja wykładnicza

ZADANIE 1.A

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2^x + 1$. Określ jej monotoniczność.

Rozwiązanie:



Funkcja $f(x)$ jest funkcją rosnącą.

ZADANIE 1.B

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Wyznacz jej miejsca zerowe.

Odpowiedź/wskazówka:

Miejsca zerowe

<u>Pierwszy sposób</u> – metoda graficzna

Z geometrycznego punktu widzenia miejsca zerowe znajdują się na przecięciu wykresu z osią OX. Z powyższego wykresu odczytujemy natychmiast, że

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

<u>Drugi sposób</u> – metoda algebraiczna

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

Z różnowartościowości funkcji wykładniczej uzyskujemy, że

$$x = 0$$

ZADANIE 1.C

Niech $f(x) = 3^x + a$. Dla jakich wartości parametru a funkcja f posiada jedno miejsce zerowe dla argumentu większego od zera.

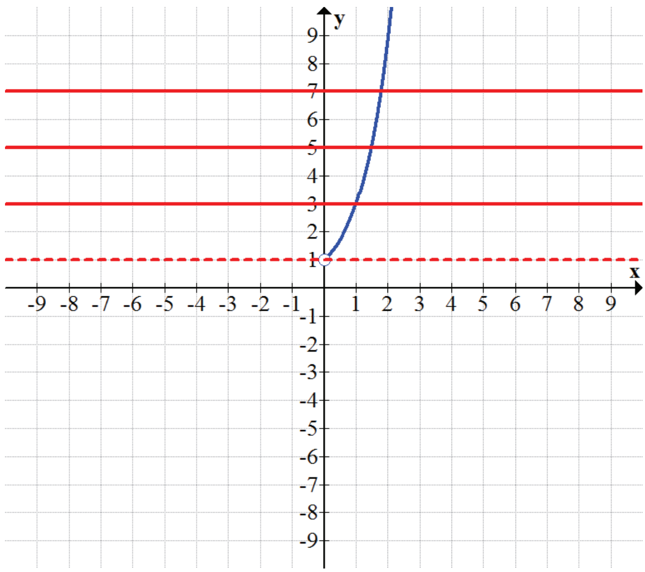
Odpowiedź/wskazówka:

Zgodnie z treścią zadania mamy rozważyć tylko argumenty $x > 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3^x + a = 0$$

$$3^x = -a$$

Z geometrycznego punktu widzenia pytamy, kiedy wykres lewej strony równania (funkcja $y = 3^x$ dla $x > 0$ – niebieska linia) ma punkt/punkty wspólne z wykresem prawej strony równania (funkcje stałe $y = -a$ – rodzina czerwonych linii).



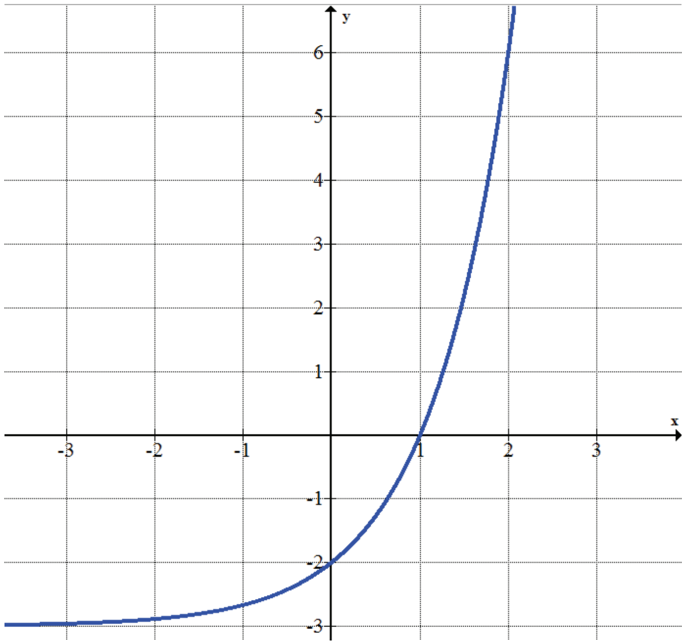
Widzimy, że punkt wspólny pojawia się o ile

$$-a > 1$$

Czyli dla $a < -1$.

ZADANIE 2.A

Na podstawie wykresu określ wzór funkcji wykładniczej $f(x) = a^x - 3$.



Rozwiązanie:

Postać wzoru, zgodnie z treścią zadania jest następująca:

$$f(x) = a^x - 3$$

Wykres funkcji przechodzi m.in. przez punkt $(1; 0)$. Jego współrzędne muszą zatem spełniać wzór funkcji

$$0 = a^1 - 3$$

Rozwiązując powyższe równanie względem a uzyskujemy, że

$$a = 3.$$

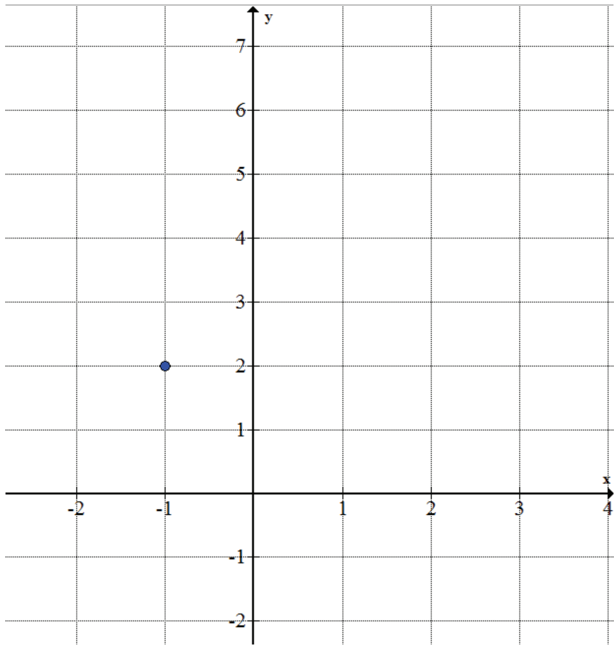
Szukany wzór funkcji to

$$f(x) = 3^x - 3$$

ZADANIE 2.B

W układzie współrzędnych zaznaczono punkt, przez który przechodzi wykres funkcji

$f(x) = a^x - 1$. Naszkicuj wykres tej funkcji.



Odpowiedź/wskazówka:

Postać wzoru, zgodnie z treścią zadania

$$f(x) = a^x - 1$$

Do wykresu należy punkt $(-1; 2)$. Jego współrzędne muszą zatem spełniać wzór funkcji

$$2 = a^{-1} - 1$$

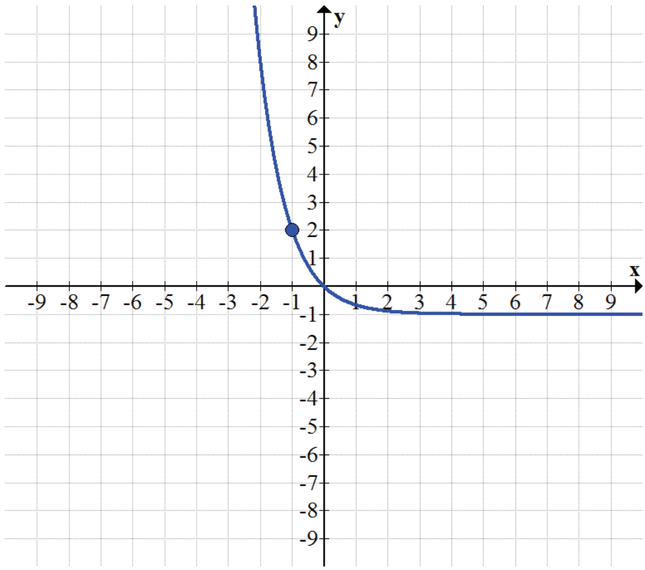
$$\frac{1}{a} = 3$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Wzór funkcji

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$$

Wykres



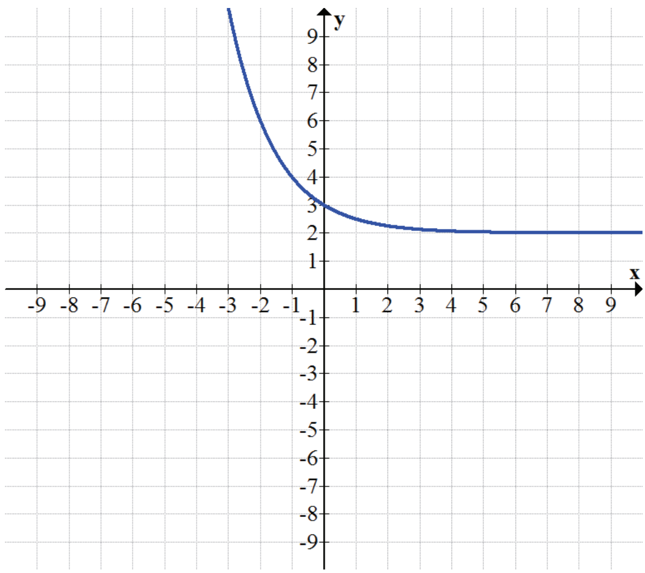
ZADANIE 2.C

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$, gdzie $f(x) = 2^x + 2$.

Odpowiedź/wskazówka:

Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania jest narysowanie wykresu metodą przekształceń:

1. $h(x) = 2^x$;
2. $f(x) = h(x) + 2 = 2^x + 2$ – przesunięcie wykresu funkcji $h(x)$ o wektor $[0; 2]$;
3. $g(x) = f(-x)$ – obraz wykresu funkcji $f(x)$ w symetrii osiowej względem osi OY.



ZADANIE 3.A

Uzasadnij, że $2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy lewą stronę zależności przez L, zaś prawą przez P

$$L = 2^{\sqrt{2}}$$

$$P = 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Zauważmy, że wobec powyższych przekształceń zarówno L jak i P zostały przedstawione jako potęgi o podstawie 2.

Przyjrzyjmy się wykładnikom:

$$\sqrt{2} \approx 1.41 < 1.5 = \frac{3}{2}$$

Funkcja wykładnicza o podstawie $a = 2$ jest funkcją rosnącą (większe wartości przyjmuje dla większych argumentów) zatem

$$2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}}$$

Czyli tym samym

$$2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}.$$

ZADANIE 3.B

Uzasadnij, że $3^{\pi} > 9$.

Odpowiedź/wskazówka:

Analogicznie – jak w 3A: sprowadzamy do potęgi o tej samej podstawie i korzystamy z monotoniczności funkcji wykładniczej.

ZADANIE 3.C

Uzasadnij, że $\pi^{\pi} > 9^{\frac{3}{5}}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$L = \pi^{\pi} > 3^3 = 27$$

$$P = 9^{\frac{3}{5}} < 9^1 = 9$$

$$27 > 9$$

$$L > 27 > 9 > P$$

Zatem

$$\pi^{\pi} > 9^{\frac{3}{5}}$$

4 Ciągi liczbowe

ZADANIE 1.A

Dany jest ciąg $a_n = (-1)^n n + 2$. Narysuj cztery początkowe wyrazy ciągu.

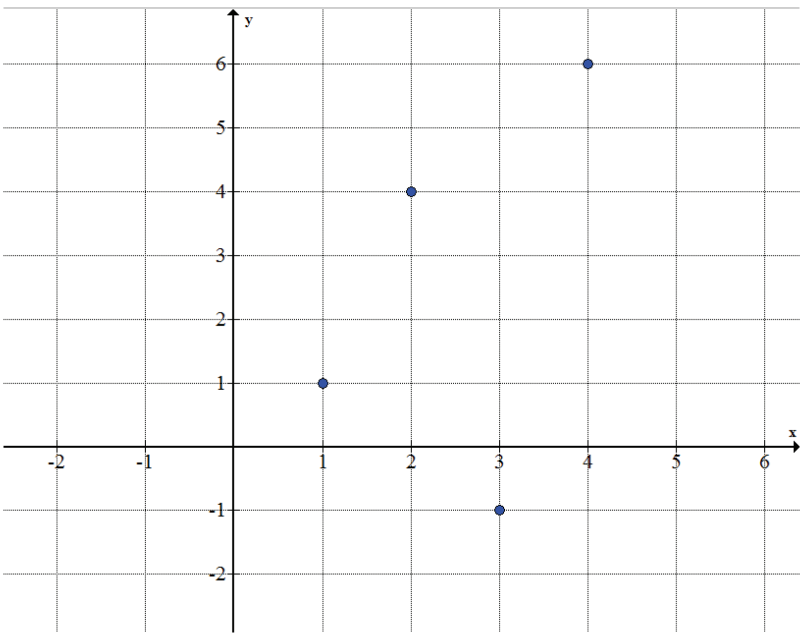
Rozwiązanie:

$a_1 = (-1)^1 \cdot 1 + 2 = 1$

$a_2 = (-1)^2 \cdot 2 + 2 = 4$

$a_3 = (-1)^3 \cdot 3 + 2 = -1$

$a_4 = (-1)^4 \cdot 4 + 2 = 6$



ZADANIE 1.B

Dany jest ciąg $a_n = (-n)^n + 3$. Wyznacz trzy początkowe wyrazy ciągu.

Odpowiedź/wskazówka:

$a_1 = (-1)^1 + 3 = 2$

$a_2 = (-2)^2 + 3 = 7$

$a_3 = (-3)^3 + 3 = -24$

ZADANIE 1.C

Dany jest ciąg $a_n = n^2 + 3$. Który z wyrazów jest równy 52?

Odpowiedź/wskazówka:

$$n^2 + 3 = 52$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe pamiętając, że $n \in \mathbb{N}$ (n to numer wyrazu ciągu).

$$n^2 - 49 = 0$$

$$(n-7)(n+7) = 0$$

$$n = 7 \in \mathbb{N} \text{ lub } n = -7 \notin \mathbb{N}$$

Zatem $a_7 = 52$.

ZADANIE 2.A

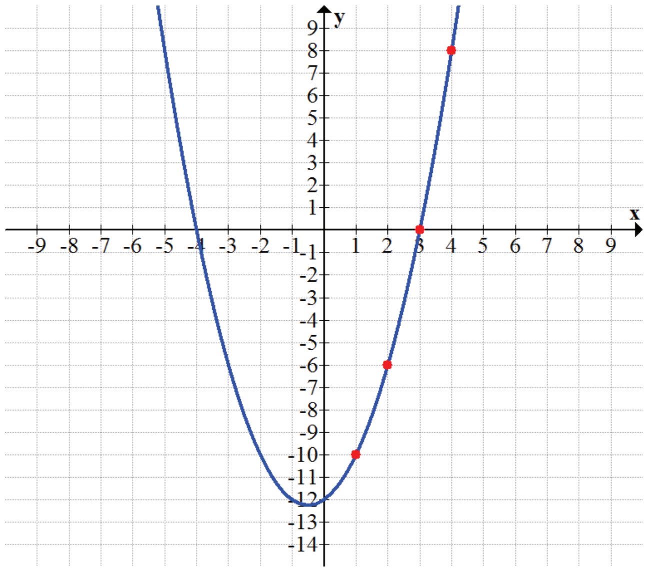
Dany jest ciąg $a_n = (n+4)(n-3)$. Które wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $a_n > 0$.

Rozwiązanie:

n - numer wyrazu ciągu, więc $n \in \mathbb{N}$

$$a_n > 0$$

$$(n+4)(n-3) > 0$$



Gdyby n było liczbą rzeczywistą (niebieski wykres), to powyższa nierówność byłaby spełniona dla $n \in (-\infty;\ -4) \cup (3;\ +\infty)$. Wobec faktu, że $n \in \mathbb{N}$ interesuje nas tylko część wspólna:

$$n \in \big((-\infty;\ -4) \cup (3;\ +\infty)\big) \cap\ \mathbb{N}$$

$$n \in \{4, 5, 6, 7, \dots\}$$

Odpowiedź: Wyrazy ciągu są dodatnie począwszy od a_4.

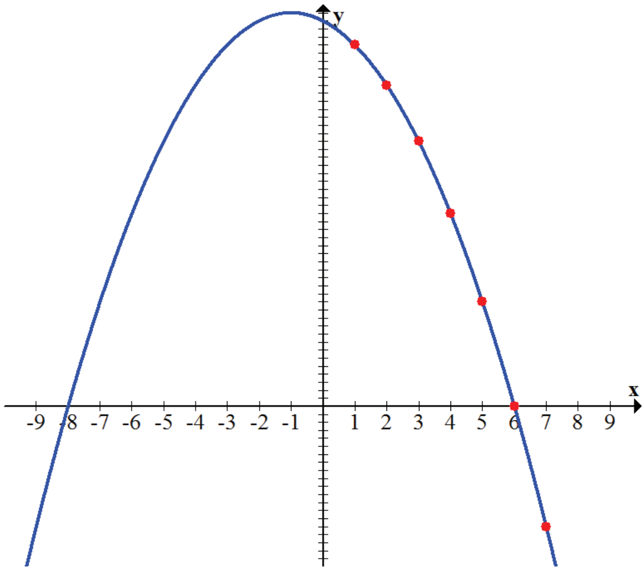
Uwaga: Czerwone punkty na powyższym wykresie stanowią fragment wykresu ciągu (a_n).

ZADANIE 2.B

Dany jest ciąg $a_n = -(n+8)(n-6)$. Które wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $a_n > 0$.

Odpowiedź/wskazówka:

$a_n > 0 \Leftrightarrow -8 < n < 6 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Postępujemy analogicznie jak w zadaniu 2A.

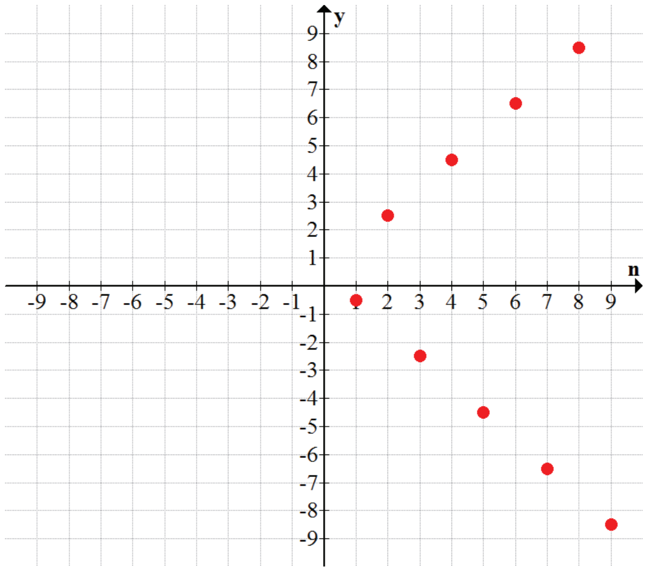
ZADANIE 2.C

Dany jest ciąg $a_n = (-1)^n n + \frac{1}{2}$. Które wyrazy spełniają nierówność $a_n > 0$.

Odpowiedź/wskazówka:

$a_n > 0 \Leftrightarrow n -$ parzyste

Spróbuj wykonać wykres tego ciągu.



ZADANIE 3.A

Dany jest ciąg $a_n = (-1)^n + 2n$. Wyznacz wzór ciągu $b_n = a_{2n}$.

Rozwiązanie:

$$b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} + 2 \cdot 2n = 4n + 1$$

ZADANIE 3.B

Dany jest ciąg $a_n = 3^n - n$. Wyznacz wzór ciągu $b_n = a_{n+3}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$b_n = a_{n+3} = 3^{n+3} - (n+3) = 27 \cdot 3^n - n - 3$$

ZADANIE 3.C

Dany są ciągi: $a_n = -n + 2$, $b_n = n + 1$. Wyznacz wzór ciągu $c_n = a_{n+1} \cdot b_{n+2}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$c_n = a_{n+1} \cdot b_{n+2} = (-(n + 1) + 2)(n + 2 + 1) = (1 - n)\ (n + 3) = -n^2 - 2\,n + 3$$

4.1 Ciąg arytmetyczny

ZADANIE 1.A

Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego, jeśli $a_{10} = 32$, $a_3 = 11$.

Rozwiązanie:

W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

gdzie: a_1 - pierwszy wyraz ciągu, r – różnica ciągu arytmetycznego

Zatem

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 + 9r \\ a_3 = a_1 + 2r \end{cases}$$

Z treści zadania mamy, że $a_{10} = 32$, $a_3 = 11$, więc

$$\begin{cases} a_1 + 9r = 32 \\ a_1 + 2r = 11 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań uzyskujemy

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ r = 3 \end{cases}$$

Czyli wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) ma postać

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3$$

Ostatecznie

$$a_n = 3\,n + 2.$$

ZADANIE 1.B

W ciągu arytmetycznym $a_2 = 5, r = 2$. Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu.

Odpowiedź/wskazówka:

$$a_1 = a_2 - r = 5 - 2 = 3$$

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$$

$$a_n = 2\,n + 1$$

$$a_8 = 2 \cdot 8 + 1 = 17$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{3 + 17}{2} \cdot 8 = 80$$

ZADANIE 1.C

Suma czterech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 26. Wyznacz wzór ciągu, jeśli jego różnica jest równa 3.

Odpowiedź/wskazówka:

$$S_4 = 26$$

Ze wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy

$$\frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 26 \;|:2$$

$$a_1 + a_4 = 13$$

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego uzyskujemy

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Z treści zadania mamy, że $r = 3$, zatem

$$a_4 = a_1 + 9$$

Z uzyskanych zależności wyliczamy a_1

$$a_1 = 2$$

Czyli wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) ma postać

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = 3\,n - 1.$$

ZADANIE 2.A

Liczby $x, x-4, 2x$ są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz wzór ciągu.

Rozwiązanie:

W ciągu arytmetycznym (a_n)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

Zatem

$$x - 4 = \frac{x + 2x}{2}$$

$$x = -8$$

Czyli kolejne wyrazy tego ciągu, to:

$$-8, -12, -16$$

Oznacza to, że $a_1 = -8$, zaś $r = -4$. Czyli wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) ma postać

$$a_n = -8 + (n - 1) \cdot (-4)$$

$$a_n = -4\,n - 4.$$

ZADANIE 2.B

Uzasadnij dlaczego liczby $x, x - 4,\ 2x, -x$ NIE stanowią pierwszych czterech wyrazów ciągu arytmetycznego.

Odpowiedź/wskazówka:

Rozważając trzy początkowe wyrazy uzyskujemy

$$x - 4 = \frac{x + 2x}{2} \Rightarrow x = -8$$

Rozważając wyrazy drugi, trzeci i czwarty uzyskujemy

$$2x = \frac{x - 4 + (-x)}{2} \Rightarrow x = -1$$

Zatem NIE da się dobrać x w ten sposób, aby cztery liczby dane w zadaniu w podanej kolejności stanowiły kolejne wyrazy tego samego ciągu arytmetycznego.

ZADANIE 2.C

Uzasadnij, że co drugi wyraz ciągu arytmetycznego tworzy ciąg arytmetyczny.

Odpowiedź/wskazówka:

Należy zwrócić uwagę, skoro między kolejnymi wyrazami różnica jest stała (równa r), to biorąc co drugi wyraz też uzyskamy stałą różnicę między nimi (równą $2r$).

ZADANIE 3.A

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n). Wykaż, że ciąg $b_n = a_n + 3$ też jest arytmetyczny.

Rozwiązanie:

(a_n) – arytmetyczny $\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$

Rozważmy $b_n = a_n + 3 = a_1 + (n-1)r + 3 = a_1 + 3 + (n-1)r$.

Ciąg (b_n) będzie miał zatem taką samą różnicę jak ciąg (a_n), zaś $b_1 = a_1 + 3$.

ZADANIE 3.B

Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n). Wykaż, że ciąg $b_n = -2a_n$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, gdzie $r > 0$. Wtedy $b_n = -2a_n = -2 \cdot a_1 - 2 \cdot (n-1) \cdot r$.
Pokażemy, że b_n jest arytmetyczny. Sprawdźmy, czy spełniony jest warunek: $b_{n+1} = \frac{b_n + b_{n+2}}{2}$.
Zatem $-2 \cdot a_1 - 2 \cdot n \cdot r = \frac{-2 \cdot a_1 - 2 \cdot (n-1) \cdot r + (-2 \cdot a_1 - 2 \cdot (n+1) \cdot r)}{2}$.

Wyznaczmy różnicę ciągu b_n. Zatem $b_{n+1} - b_n = -2r < 0$, stąd ciąg jest malejący.

ZADANIE 3.C

Dane są dwa ciągi arytmetyczne (a_n) i (a'_n). Wykaż, że ciąg $c_n = a_n + a'_n$ też jest arytmetyczny.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, $a'_n = a'_1 + (n-1) \cdot r'$. Pokażemy, że (c_n) jest arytmetyczny.
Sprawdźmy, czy spełniony jest warunek: $c_{n+1} = \frac{c_n + c_{n+2}}{2}$.

$$(a_1 + n \cdot r) + (a'_1 + n \cdot r') = \frac{(a_1 + (n-1) \cdot r + a'_1 + (n-1) \cdot r') + (a_1 + (n+1) \cdot r + a'_1 + (n+1) \cdot r')}{2}$$

Istotnie, powyższa zależność jest spełniona tożsamościowo, zatem ciąg (c_n) jest arytmetyczny.

4.2 Ciąg geometryczny

ZADANIE 1.A

Wyznacz wzór ciągu geometrycznego, jeśli $a_3 = 12$, $a_5 = 48$.

Rozwiązanie:

W ciągu geometrycznym (a_n) mamy

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

gdzie: a_1 - pierwszy wyraz ciągu, q - iloraz ciągu geometrycznego

$$\begin{cases} a_3 = a_1 \cdot q^2 \\ a_5 = a_1 \cdot q^4 \end{cases}$$

Z treści zadania mamy, że $a_3 = 12$, $a_5 = 48$, więc

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 12 \\ a_1 \cdot q^4 = 48 \end{cases}$$

$$\{a_1\, q^2 = 12, a_1\, q^4 = 48\}$$

Rozwiązując układ równań uzyskujemy

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases}$$

Mamy zatem dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania:

- $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$
  lub
- $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

ZADANIE 1.B

W ciągu geometrycznym $a_3 = \frac{1}{27}$, $q = \frac{1}{3}$. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu.

Odpowiedź/wskazówka:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{1}{27} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Zatem

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

Suma n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q}$$

Wstawiając a_1 oraz q uzyskujemy $\frac{1}{3}$

$$S_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{243}$$

ZADANIE 1.C

Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi $\frac{7}{8}$. Wyznacz wzór ciągu, jeśli jego iloraz jest równy $\frac{1}{2}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$S_3 = \frac{7}{8}$$

$$S_3 = a_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}}$$

Zatem

$$\frac{7}{8} = a_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Czyli wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) ma postać

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ostatecznie

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

ZADANIE 2.A

Liczby $x, x, 4$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór tego ciągu.

Rozwiązanie:

W ciągu geometrycznym (a_n) prawdziwa jest własność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

W warunkach zadania przyjmuje ona postać

$$x^2 = x \cdot 4$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 4$$

Zatem skoro $x, x, 4$ miały stanowić kolejne wyrazy ciągu geometrycznego mamy do rozważenia 2 przypadki

- $0, 0, 4$ - NIE jest to ciąg geometryczny
- $4, 4, 4$ - JEST to ciąg geometryczny stały, gdzie $a_1 = 4$, $q = 1$

Ostatecznie warunki zadania spełnia jeden ciąg geometryczny (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a_n = 4.$$

ZADANIE 2.B

Uzasadnij dlaczego liczby $x,\ x,\ 8, 2x + 1$ NIE stanowią w podanej kolejności pierwszych czterech wyrazów ciągu geometrycznego.

Odpowiedź/wskazówka:

Rozważając trzy początkowe wyrazy uzyskujemy

$$x^2 = x \cdot 8$$

Z czego wynika, że będziemy mieli do czynienia z ciągiem geometrycznym dla $x = 8$.

Rozważając wyrazy drugi, trzeci i czwarty uzyskujemy

$$8 = x \cdot (2x + 1)$$

Z czego wynika, że będziemy mieli do czynienia z ciągiem geometrycznym dla

$$x = \frac{-\sqrt{65} - 1}{4} \text{ lub } x = \frac{\sqrt{65} - 1}{4}$$

Zatem NIE da się dobrać x w ten sposób, aby cztery liczby dane w zadaniu w podanej kolejności stanowiły kolejne wyrazy tego samego ciągu geometrycznego.

ZADANIE 2.C

Uzasadnij, że ciąg powstały z ciągu geometrycznego przez odrzucenie wyrazów o numerach nieparzystych (albo parzystych) jest geometryczny.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Niech $b_n = a_1 \cdot q^{2n-2}$ -(wzór na co drugi wyraz). Pokażemy, że b_n jest geometryczny. Sprawdźmy, czy spełniony jest warunek: $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$.

Istotnie, $(a_1 \cdot q^{2n})^2 = (a_1 \cdot q^{2n-2})(a_1 \cdot q^{2n+2})$.

ZADANIE 3.A

Dany jest ciąg geometryczny a_n. Wykaż, że ciąg $b_n = 3 \cdot a_n$ też jest geometryczny.

Rozwiązanie:

Niech $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Niech $b_n = 3 \cdot a_1 \cdot q^{n-1}$. Pokażemy, że b_n jest geometryczny. Sprawdźmy, czy spełniony jest warunek: $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$.

Istotnie, $(3 \cdot a_1 \cdot q^n)^2 = (3 \cdot a_1 \cdot q^{n-1})(3 \cdot a_1 \cdot q^{n+1})$.

ZADANIE 3.B

Dany jest naprzemienny ciąg geometryczny (a_n). Wykaż, że ciąg $b_n = -2a_n$ też jest naprzemiennym ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i $q < 0$. Niech $b_n = -2 \cdot a_1 \cdot q^{n-1}$. Pokażemy, że b_n jest geometryczny i naprzemienny. Sprawdźmy, czy spełniony jest warunek: $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$.

Istotnie, $(-2 \cdot a_1 \cdot q^n)^2 = (-2 \cdot a_1 \cdot q^{n-1})(-2 \cdot a_1 \cdot q^{n+1})$. Wyznaczmy iloraz ciągu b_n. Zatem $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, czyli ciąg jest naprzemienny.

ZADANIE 3.C

Dane są dwa ciągi geometryczne a_n i a'_n. Wykaż, że ciąg $c_n = a_n \cdot a'_n$ też jest geometryczny.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a'_n = a'_1 \cdot q'^{n-1}$. Pokażemy, że (b_n) jest geometryczny. Sprawdźmy, czy spełniony jest warunek: $c_{n+1}^2 = c_n \cdot c_{n+2}$

$$(a_1 \cdot q^n \cdot a'_1 \cdot q'^n)^2 = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot a'_1 \cdot q'^{n-1} \cdot a_1 \cdot q^{n+1} \cdot a'_1 \cdot q'^{n+1}$$

Powyższa zależność jest spełniona tożsamościowo, zatem istotnie ciąg (c_n) jest geometryczny.

4.3 Kredyty i lokaty

ZADANIE 1.A

Państwo Kowalscy założyli lokatę w wysokości 1000 zł. Oprocentowanie roczne lokaty wynosi 6% i kapitalizacja następuje po roku. Jaką kwotę będą mieli po dwóch latach?

Rozwiązanie:

Kwota po roku: $1000 + 1000 \cdot 0.06 = 1060$

Kwota po dwóch latach: $1060 + 1060 \cdot 0.06 = 1123.6$

ZADANIE 1.B

Państwo Kowalscy założyli lokatę w wysokości 4000 zł. Oprocentowanie roczne lokaty wynosi 4% i kapitalizacja następuje co pół roku. Jaką kwotę będą mieli po roku?

Odpowiedź/wskazówka:

Kwota po pół roku: $4000 + 4000 \cdot 0.04 \cdot \frac{1}{2} = 4080$

Kwota po roku: $4080 + 4080 \cdot 0.04 \cdot \frac{1}{2} = \frac{20808}{5} \approx 4161.60$

ZADANIE 1.C

Państwo Kowalscy założyli lokatę w wysokości 2000 zł. Oprocentowanie roczne lokaty wynosi 7% i kapitalizacja następuje po każdym kwartale. Jaką kwotę będą mieli po roku?

Odpowiedź/wskazówka:

Kwota po pierwszym kwartale: $2000 + 2000 \cdot 0.07 \cdot \frac{1}{4} = 2035$

Kwota po drugim kwartale: $2035 + 2035 \cdot 0.07 \cdot \frac{1}{4} = \frac{165649}{80} \approx 2070.61$

Kwota po trzecim kwartale: $2070.61 + 2070.61 \cdot 0.07 \cdot \frac{1}{4} \approx 2106.85$

Kwota po czwartym kwartale: $2106.85 + 2106.85 \cdot 0.07 \cdot \frac{1}{4} \approx 2143.72$

ZADANIE 2.A

Jakie było oprocentowanie lokaty, jeśli wpłacono 10000 zł a po roku na bank wypłacił 101025 zł. Kapitalizacja w banku następowała co pół roku.

Odpowiedź/wskazówka:

10%

ZADANIE 2.B

Jaką kwotę należy wpłacić do banku, aby po dwóch latach odsetki wynosiły 988,80 zł. Oprocentowanie w banku wynosi 6% i kapitalizacja jest co roku.

Odpowiedź/wskazówka:

Odp. 8000 zł

ZADANIE 2.C

Jaką kwotę należy wpłacić do banku, aby po pół roku odsetki wynosiły 15 zł. Oprocentowanie w banku wynosi 5% i kapitalizacja jest co roku (ale w każdej chwili bank wypłaca należne odsetki).

Odpowiedź/wskazówka:

Odsetki w ciągu roku będą wynosiły 30 zł. Zatem do banku wpłacono 600 zł.

ZADANIE 3.A

Państwo Kowalscy wpłacili na lokatę 2000 zł. Kapitalizacja odsetek następowała po każdym roku. Po czterech latach kwota na koncie podwoiła się.

Państwo Nowakowie wpłacili do tego banku 6000 zł. Po ilu latach ta kwota się podwoi?

Rozwiązanie:

Kwota podwoi się także po czterech latach.

ZADANIE 3.B

Państwo Kowalscy wpłacili na lokatę 800 zł. Kapitalizacja odsetek następowała po każdym kwartale. Po trzech latach kwota na koncie podwoiła się.

Państwo Nowakowie wpłacili do tego banku 400 zł. Po ilu latach ta kwota się podwoi?

Odpowiedź/wskazówka:

Kwota podwoi się także po trzech latach.

ZADANIE 3.C

Która z lokat bankowych jest atrakcyjniejsza po roku:

a) 6% przy kapitalizacji kwartalnej
b) 6% przy kapitalizacji rocznej

Odpowiedź/wskazówka:

Niech x będzie kwotą lokaty. Po roku mamy:

a) 6% przy kapitalizacji kwartalnej $1{,}015 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}015 \cdot x \approx 1{,}061 \cdot x$
b) 6% przy kapitalizacji rocznej, $1{,}06x$ zł.

   Atrakcyjniejsza jest lokata w pierwszym przypadku.

5 Trygonometria

ZADANIE 1.A

Wiadomo, że $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ i α jest kątem ostrym. Wyznacz $\sin\alpha$.

Rozwiązanie:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$, stąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ lub $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ (tę odpowiedź odrzucamy, ponieważ α jest kątem ostrym).

ZADANIE 1.B

Używając kalkulatora (lub tablic matematycznych) wyznacz (w przybliżeniu) $\sin 25^0$, $\cos 25^0$, $\operatorname{tg} 25^0$.

Odpowiedź/wskazówka:

$\sin 25^0 \approx 0{,}42$, $\cos 25^0 \approx 0{,}91$, $\operatorname{tg} 25^0 = 0{,}47$.

ZADANIE 1.C

Używając kalkulatora (lub tablic matematycznych) wyznacz kąt α, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$.

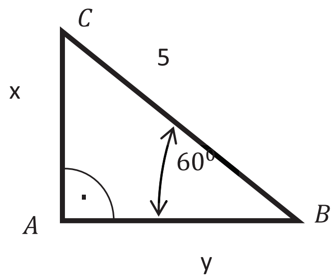
Odpowiedź/wskazówka:

$\alpha \approx 14^0$.

ZADANIE 2.A

Przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym ma długość 5. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli jeden z kątów ostrych ma miarę 60^0.

Rozwiązanie:



$\sin 60^0 = \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd $x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$\cos 60^0 = \frac{y}{5} = \frac{1}{2}$, stąd $y = \frac{5}{2}$.

ZADANIE 2.B

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają odpowiednio długości: 4 i 5. Wyznacz z dokładnością do jednego stopnia przybliżoną miarę kątów ostrych.

Odpowiedź/wskazówka:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}$, stąd $\alpha \approx 51^0$, $\beta \approx 39^0$.

ZADANIE 2.C

Przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 4 i tworzy z przeciwprostokątną kąt o mierze 36^0. Wyznacz przybliżoną długość przeciwprostokątnej.

Odpowiedź/wskazówka:

$\cos 36^0 \approx 0{,}8 = \frac{4}{c}$ stąd $c \approx 5$.

ZADANIE 3.A

Wiadomo, że $\cos\alpha = x$, gdzie α jest kątem ostrym. Wyznacz $\sin^2\alpha + \cos\alpha$.

Rozwiązanie:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - x^2$. Zatem $\sin^2\alpha + \cos\alpha = 1 - x^2 + x$.

ZADANIE 3.B

Wiadomo, że $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = x$, gdzie α jest kątem ostrym. Wyznacz $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

Odpowiedź/wskazówka:

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2x$.

ZADANIE 3.C

Wiadomo, że $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = x$, gdzie α jest kątem ostrym. Wyznacz $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Odpowiedź/wskazówka:

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$, stąd

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = x$.

6 Geometria

6.1 Planimetria

ZADANIE 1.A

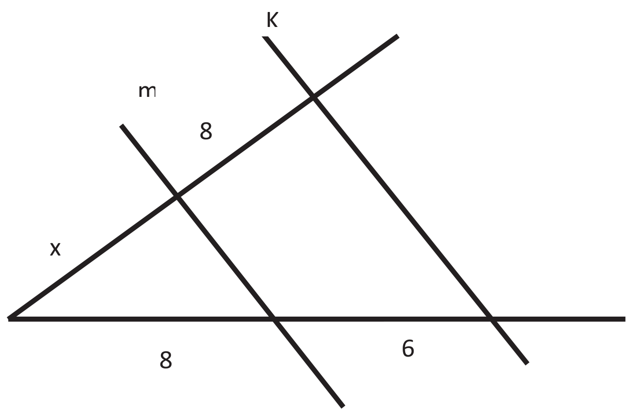
Trójkąty: ABC i $A'B'C'$ są podobne. Wiadomo, że $|AB| = 6, |AC| = 15, |A'B'| = 12$. Wyznacz $|A'C'|$.

Rozwiązanie:

Korzystając z podobieństwa trójkątów dostajemy: $|A'C'| = 30$.

ZADANIE 1.B

Wyznacz długość odcinka x wiedząc, że proste k, m są do siebie równoległe.



Odpowiedź/wskazówka:

$$\frac{8}{14} = \frac{x}{x+8}$$

Stąd $8x + 64 = 14x, x = 10\frac{2}{3}$.

ZADANIE 1.C

Trójkąt ABC jest przystający do trójkąta $A'B'C'$. Wiadomo, że obwód trójkąta $A'B'C'$ jest równy 15 oraz $|AB| = 3$, $|AC| = 7$. Wyznacz $|B'C'|$.

Odpowiedź/wskazówka:

Trójkąty ABC oraz $A'B'C$ są przystający więc ich obwody są równe. Zatem $|BC| = 5 = |B'C'|$.

ZADANIE 2.A

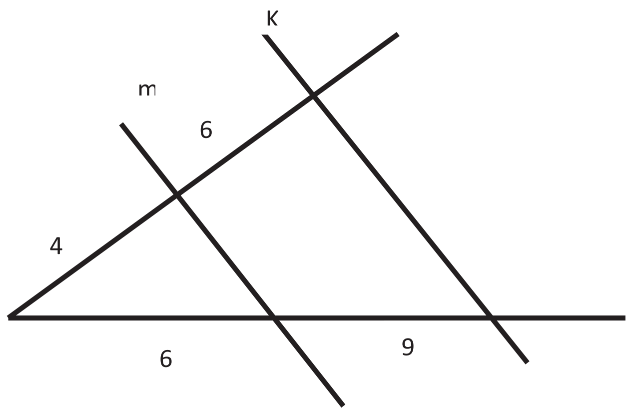
Trójkąty: ABC i $A'B'C'$ są podobne. Wiadomo, że $|AB| = 2, |A'B'| = 6$. Wyznacz pole powierzchni trójkąta ABC jeśli pole powierzchni trójkąta $A'B'C'$ wynosi 45.

Rozwiązanie:

Skala podobieństwa jest równa: $k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = 3$. Wiadomo, że : $\frac{P\prime}{P} = k^2 = 9$, gdzie P- pole trójkąta ABC, P'- pole trójkąta $A'B'C'$. Zatem $P = 5$.

ZADANIE 2.B

Uzasadnij, że proste k, m przedstawione na rysunku są do siebie równoległe.



Odpowiedź/wskazówka:

Sprawdźmy:

$$\frac{4}{10} = \frac{6}{15}$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa proste są równoległe.

ZADANIE 2.C

Trójkąt ABC jest przystający do trójkąta $A'B'C'$. Wiadomo, że obwód trójkąta $A'B'C'$ jest równy 15 oraz $|AB| = 3$, $|AC| = 7$. Wyznacz $|B'C'|$.

Odpowiedź/wskazówka:

Trójkąty ABC oraz $A'B'C$ są przystający więc ich obwody są równe. Zatem $|BC| = 5 = |B'C'|$.

ZADANIE 3.A

Przedstaw cechy podobieństwa prostokątów.

Rozwiązanie:

1. Dwa prostokąty są podobne, jeśli stosunki długości boków są równe.
2. Dwa prostokąty są podobne, jeśli stosunki: długość boku i długość przekątnej są równe.

ZADANIE 3.B

Przedstaw cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych.

Odpowiedź/wskazówka:

1. Dwa trójkątów prostokątnych, jeśli stosunki długości boków są równe.
2. Dwa prostokąty są podobne, jeśli stosunki: długość boku i długość przekątnej są równe.

ZADANIE 3.C

Przedstaw cechy przystawania trójkątów równobocznych.

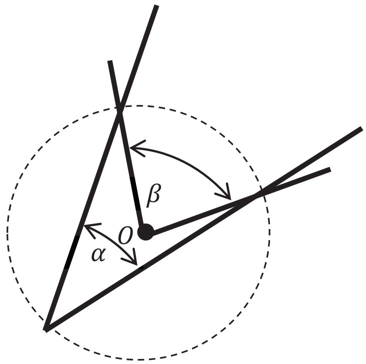
Odpowiedź/wskazówka:

1. Wystarczy aby długości boków były równe.

6.1.1 Kąt środkowy i wpisany

ZADANIE 1.A

Kąt $\propto$ ma miarę 25^0. Na podstawie rysunku wyznacz miarę kąta β.

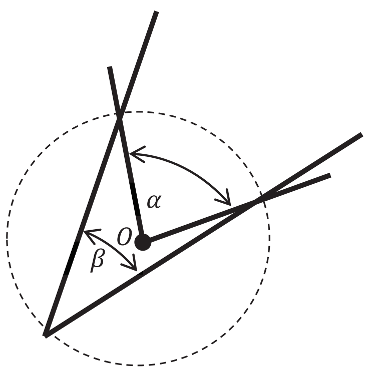


Rozwiązanie:

$\beta = 2\alpha = 2 \cdot 25^0 = 50^0$

ZADANIE 1.B

Kąt $\propto$ ma miarę 62^0. Na podstawie rysunku wyznacz miarę kąta β.

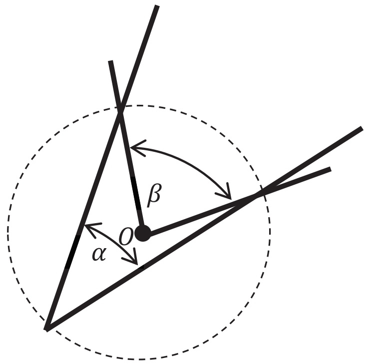


Odpowiedź/wskazówka:

$\beta = \frac{\propto}{2} = 31^0$

ZADANIE 1.C

Suma miar kątów $\propto, \beta$ jest równa 105^0. Na podstawie rysunku wyznacz miary tych kątów.

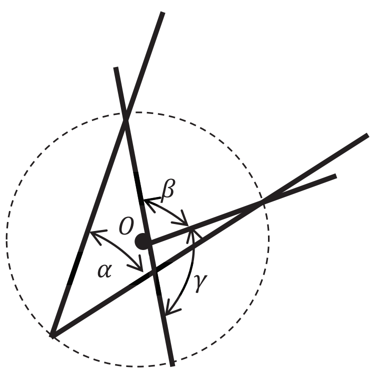


Odpowiedź/wskazówka:

$\alpha + \beta = \alpha + 2\alpha = 105^0$. Stąd $\alpha = 35^0, \beta = 70^0$.

ZADANIE 2.A

Na podstawie rysunku wyznacz miarę kąta $\propto$, jeśli $\gamma = 100^0$.

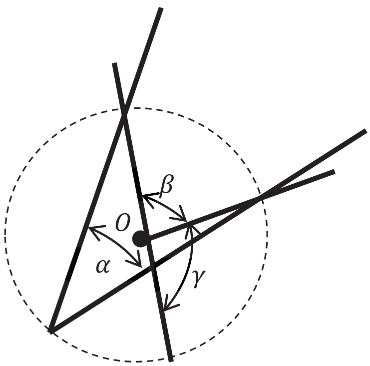


Rozwiązanie:

Ponieważ $\gamma = 100^0$, zatem $\beta = 80^0$ (razem tworzą kat półpełny). Z równości $2 \propto = \beta$ otrzymujemy, że $\propto = 40^0$.

ZADANIE 2.B

Na podstawie rysunku wyznacz miarę kąta γ, jeśli $\propto = 35^0$.

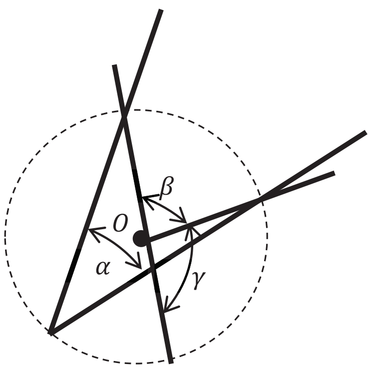


Odpowiedź/wskazówka:

Z równości $2 \propto = \beta$ otrzymujemy, że $\beta = 70^0$. Ponieważ $\beta + \gamma = 180^0$, zatem $\gamma = 110^0$.

ZADANIE 2.C

Na podstawie rysunku wyznacz miarę kąta β, jeśli $\alpha + \gamma = 150^0$.



Odpowiedź/wskazówka:

Wiadomo, że $2 \propto = \beta$, $\beta + \gamma = 180^0$, zatem $2 \propto + \gamma = 180^0$. Ponieważ $\alpha + \gamma = 150^0$, zatem $\alpha = 30^0$, więc $\beta = 60^0$.

6.1.2 Przydatne zależności i wzory dotyczące figur płaskich

ZADANIE 1.A

Boki trójkąta mają odpowiednio długości: $2, 7, 7$. Wyznacz pole tego trójkąta.

Rozwiązanie:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2+7+7}{2} = 8$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-2)(8-7)(8-7)} = 4\sqrt{3}.$$

ZADANIE 1.B

Oblicz pole powierzchni równoległoboku jeśli długości boków mają odpowiedni 5 i 8 a kąt między nimi ma miarę 30^0.

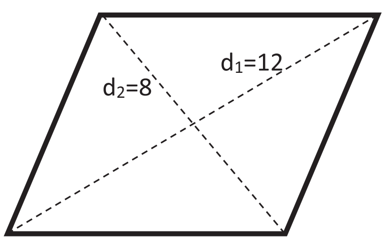
Odpowiedź/wskazówka:

$$P = 5 \cdot 8 \cdot b \sin 30^0 = 20.$$

ZADANIE 1.C

Oblicz pole rombu jeśli przekątne mają odpowiednio długości
$d_1 = 12, d_2 = 8$.

Odpowiedź/wskazówka:



$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 = 48.$$

6.1.3 Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

ZADANIE 1.A

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (1, 3)$ i równoległej do prostej o równaniu: $y = 2x - 3$.

Rozwiązanie:

Równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 3$ ma postać $y = 2x + b$. Ponieważ ma ona przechodzić przez punkt $A = (1, 3)$, zatem $y = 2x + 1$.

ZADANIE 1.B

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (0, 2)$ i prostopadłej do prostej o równaniu: $y = 3x - 1$.

Odpowiedź/wskazówka:

Równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 3x - 1$ ma postać $y = -\frac{1}{3}x + b$. Ponieważ ma ona przechodzić przez punkt $A = (0,2)$, zatem $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

ZADANIE 1.C

Wyznacz punkt przecięcia się prostych $y = 2x + 1$, $y = x - 3$.

Odpowiedź/wskazówka:

Aby wyznaczyć punkt przecięcia się prostych rozwiążmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 = 2x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \end{cases}$$

ZADANIE 2.A

Napisz równanie obrazu okręgu $x^2 + 4x + y^2 = 0$ w symetrii osiowej względem prostej o równaniu $y = 3$.

Rozwiązanie:

Wyznaczmy środek i promień okręgu o równaniu: $x^2 + 4x + y^2 = 0$.

$(x + 2)^2 + y^2 = 2^2$. Stąd $S(-2, 0)$ oraz $r = 2$. Punkt $S(-2, 0)$ symetryczny względem prostej o równaniu $y = 3$ ma współrzędne: $S'(-2, 6)$.Zatem równanie okręgu w symetrii ma postać: $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 2^2$.

ZADANIE 2.B

Jeden z wierzchołków kwadratu $ABCD$ ma odpowiednio współrzędne $A = (1, 1)$ oraz punkt przecięcia się przekątnych: S=$(7, 9)$. Wyznacz pole kwadratu.

Odpowiedź/wskazówka:

Wyznaczmy długość przekątnej: $2 \cdot \sqrt{(1 - 7)^2 + (1 - 9)^2} = 20$.

Zatem $a\sqrt{2} = 20$, stąd $a = 10\sqrt{2}$. Wyznaczmy pole kwadratu: $P = a^2 = 200$.

ZADANIE 2.C

Dwa wierzchołki trójkąta równobocznego ABC mają odpowiednio współrzędne $A = (2,5)$ $B = (6,7)$. Wyznacz współrzędne trzeciego wierzchołka.

Odpowiedź/wskazówka:

Niech $C = (x, y)$. $|AB| = \sqrt{(2 - 6)^2 + (5 - 7)^2} = 2\sqrt{5}$. Zatem

Napiszmy równanie prostej przechodzącej przez punkty A, B.

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

Punk C leży na prostej prostopadłej i przechodzącej przez środek odcinka $\overline{AB}$

Środek odcinka: $x_s = \frac{2+6}{2} = 4$, $y_s = \frac{7+5}{2} = 6$.

Prosta prostopadła: $y = -2x + b$, stąd $y = -2x + 14$.

Zatem $C = (x, -2x + 14)$.). $|AB| = |AC| = \sqrt{(x-2)^2 + (-2x + 14 - 5)^2} = 2\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5x^2 - 40x + 85} = 2\sqrt{5}$$

$$5x^2 - 40x + 85 = 20$$

$$x^2 - 8x + 13 = 0$$

$$x = 4 - \sqrt{3} \text{ lub } x = 4 + \sqrt{3}$$

Zatem $C = (4 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 6)$ lub $C = (4 + \sqrt{3}, 6 - 2\sqrt{3})$.

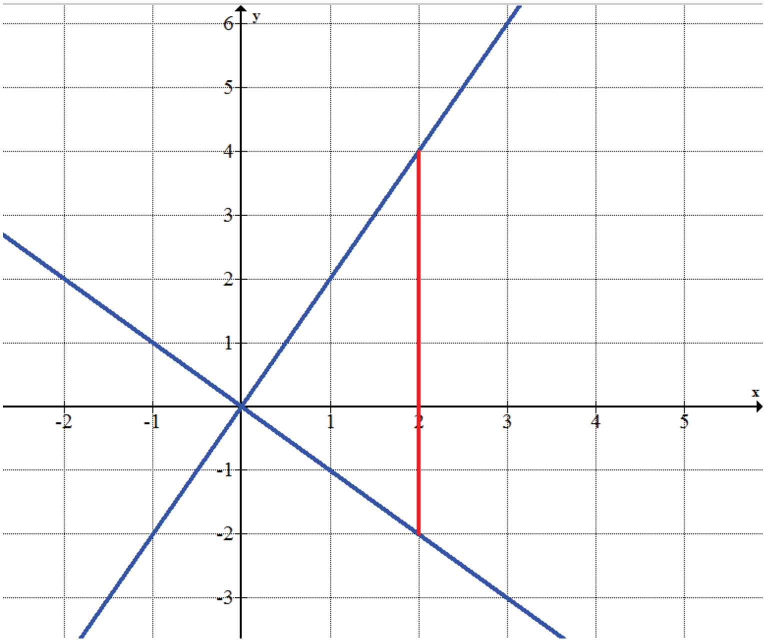
ZADANIE 3.A

Wyznacz wzór funkcji opisującej odległość między punktami o tej samej odciętej leżącymi na prostych o równaniach $y = 2x$, $y = -x$.

Rozwiązanie:

Współrzędne dowolnego punktu A o odciętej x leżącego na prostej o równaniu $y = 2x$ mają postać: $A(x, 2x)$

Współrzędne dowolnego punktu B o tej samej odciętej x leżącego na prostej o równaniu $y = -x$ mają postać: $B(x, -x)$



Odległość tych punktów wyraża się wzorem:

$$d(x) = \sqrt{(x-x)^2 + (-x-2x)^2} = \sqrt{9x^2} = |3x|$$

ZADANIE 3.B

Jakiej postaci muszą być współrzędne punktu C, aby punkty $A = (2,3)$, $B = (4,4)$, $C(c_1, c_2)$ były wierzchołkami trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku B?

Odpowiedź/wskazówka:

Znajdźmy równanie prostej przechodzącej przez punkty A, B.

Ma ono postać: $y = \frac{1}{2}x + 2$. Wyznaczmy prostą prostopadłą przechodzącą przez punkt B.

Zatem: $y = -2x + b$, stąd $y = -2x + 12$.

Stąd $C = (c_1, -2c_1 + 12)$. Dodatkowo punkt C nie może się pokrywać z punktem B, zatem $c_1 \neq 4$.

Ostatecznie: $C = (c_1, -2c_1 + 12)$, gdzie $c_1 \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$.

ZADANIE 3.C

Wyznacz zbiór środków odcinka $\overline{AB}$, gdzie $A = (-4, -6)$ a punkt B leży na wykresie funkcji o równaniu $y = x^2 + 2$.

Odpowiedź/wskazówka:

Współrzędne punktu B leżącego na wykresie funkcji $y = x^2 + 2$ mają postać: $B = (x, x^2 + 2)$.

Wyznaczmy środek odcinka $\overline{AB}$: $x_s = \frac{-4+x}{2}$, $y_s = \frac{-6+x^2+2}{2}$.

6.2 Stereometria

6.2.1 Graniastosłup, sześcian i prostopadłościan

ZADANIE 1.A

Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratowej ma długość $\sqrt{43}$. Wyznacz jego objętość jeśli suma długości wszystkich krawędzi jest równa 44.

Rozwiązanie:

Niech a oznacza długość boku kwadratu, b - długość wysokości prostopadłościanu. Wtedy

$$8a + 4b = 44$$

$$2a + b = 11$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $(a\sqrt{2})^2 + b^2 = \sqrt{43}^2$

Dalej

$$2a^2 + b^2 = 43$$

$$2a^2 + (11 - 2a)^2 = 43$$

$$6a^2 - 44a + 78 = 0$$

$$3a^2 - 22a + 39 = 0$$

$$a = 3 \text{ lub } a = \frac{13}{3}$$

Skoro $b = 11 - 2\,a$, to odpowiednio

$$b = 5 \text{ lub } b = \frac{7}{3}$$

Mamy zatem dwa prostopadłościany odpowiednio o wymiarach

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} a = \frac{13}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$V = a^2 b$$

Zatem ich objętości wynoszą odpowiednio

$$V = 3^2 \cdot 5 = 45 \text{ lub } V = \left(\frac{13}{3}\right)^2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{1183}{27}$$

ZADANIE 1.B

Pola powierzchni ścian prostopadłościanu wynoszą odpowiednio: $12, 15, 20$. Wyznacz wymiary prostopadłościanu.

Odpowiedź/wskazówka:

Oznaczmy przez x, y, z wymiary prostopadłościanu.

Wtedy $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x \cdot z = 15 \\ y \cdot z = 20 \end{cases}$

Stąd $\frac{y}{z} = \frac{4}{5}, \frac{x}{y} = \frac{3}{4},$

Odp. $x = 3, y = 4, z = 5$

ZADANIE 1.C

W prostopadłościanie długości boku zwiększono dwukrotnie, szerokość zmniejszono czterokrotnie a wysokość pozostawiono bez zmian. Jak zmieniła się objętość prostopadłościanu?

Odpowiedź/wskazówka:

Oznaczmy przez x, y, z pierwotne długości krawędzi prostopadłościanu.

Wtedy

$$V = x \cdot y \cdot z$$

Po zmianie długości krawędzi wynoszą odpowiednio: $2x, \frac{1}{4}y, z$.

Wtedy

$$V = 2x \cdot \frac{1}{4} y \cdot z = \frac{1}{2} x \cdot y \cdot z$$

Po zmianie wymiarów objętość prostopadłościanu jest dwa raz mniejsza.

ZADANIE 2.A

Wyznacz kosinus kąta między przekątną sześcianu a przekątną ściany bocznej.

Rozwiązanie

Długość przekątnej sześcianu wynosi: $a\sqrt{3}$,

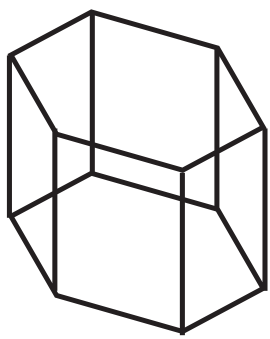
Długość przekątnej ściany bocznej: $a\sqrt{2}$

$$cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ZADANIE 2.B

W graniastosłupie wszystkie krawędzie są równej długości. Jego podstawą jest sześciokąt foremny. Wyznacz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, jeśli jego objętość wynosi 162.

Odpowiedź/wskazówka:



$$V = 6 \cdot a^2 \cdot a = 162$$

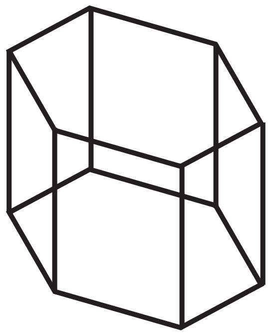
Zatem $a = 3$.

$$P = 2 \cdot P_p + 6 \cdot P_b = 12 \cdot a^2 + 6a^2 = 18a^2 = 162$$

ZADANIE 2.C

W graniastosłupie wszystkie krawędzie są równej długości. Jego podstawą jest sześciokąt foremny. Wyznacz objętość graniastosłupa, jeśli jego pole powierzchni całkowitej wynosi 18.

Odpowiedź/wskazówka:



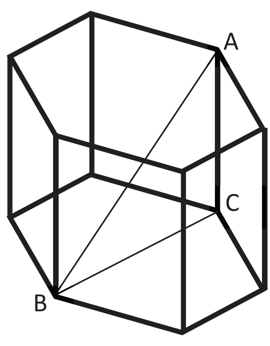
$$P = 2 \cdot P_p + 6 \cdot P_b = 12 \cdot a^2 + 6a^2 = 18a^2 = 18$$

Zatem $a = 3$.

$$V = 6 \cdot a^2 \cdot a = 6$$

ZADANIE 3.A

W graniastosłupie wszystkie krawędzie są równej długości. Jego podstawą jest sześciokąt foremny. Wyznacz $tg\measuredangle ABC$.

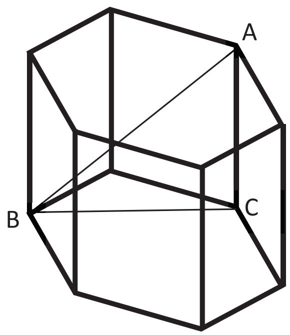


Rozwiązanie:

Niech $|AB| = a$. Wtedy $|BC| = 2a$, $tg\measuredangle ABC$=$\frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

ZADANIE 3.B

W graniastosłupie wszystkie krawędzie są równej długości. Jego podstawą jest sześciokąt foremny. Wyznacz $sin\measuredangle ABC$.



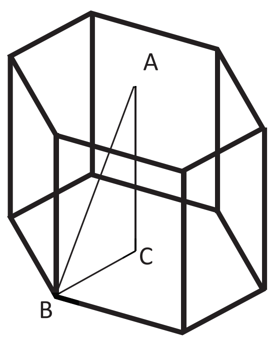
Odpowiedź/wskazówka:

Niech $|AC| = a$. Wtedy $|BC| = a\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $|AB| = a\sqrt{3}$.

$sin\measuredangle ABC=\frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ZADANIE 3.C

W graniastosłupie wszystkie krawędzie są równej długości. Jego podstawą jest sześciokąt foremny. Wyznacz $cos\measuredangle ABC$.



Odpowiedź/wskazówka:

Niech $|AC| = a$. Wtedy $|BC| = a$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $|AB| = a\sqrt{2}$.

$cos\measuredangle ABC=\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.2.2 Ostrosłup

ZADANIE 1.A

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o polu powierzchni równym 9. Wyznacz jego objętość, jeśli suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równa 44.

Rozwiązanie:

$P = a^2 = 9$, $a = 3$.

$4a + 4b = 44$, stąd $b = 8$.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $H^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8^2$

więc $H = \frac{\sqrt{238}}{2}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{238}}{2} = \frac{3\sqrt{238}}{2}$.

ZADANIE 1.B

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, którego długość przekątnej wynosi $8\sqrt{2}$. Wyznacz jego objętość, jeśli pole powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi 80.

Odpowiedź/wskazówka:

$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 3 = 64$.

ZADANIE 1.C

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat którego długość wynosi 6. Wyznacz jego objętość, jeśli pole boczne ostrosłupa wynosi jest dwa razy większe niż pole podstawy.

Odpowiedź/wskazówka:

$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.

ZADANIE 2.A

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat wynosi 60. Wyznacz objętość ostrosłupa, jeśli długość przekątnej podstawy jest równa $6\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, więc $a = 6$.

$4 \cdot P = 60$, stąd $P = 15$. $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 15$, czyli $h = 5$.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$, więc $H = 4$.

$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$.

ZADANIE 2.B

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa 36. Jego podstawą jest trójkąt równoboczny o długości boku 6. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Odpowiedź/wskazówka:

$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{13} = 3\sqrt{39}$.

ZADANIE 2.C

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat wynosi 80. Dokończ zdanie. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest większe niż .....

Odpowiedź/wskazówka:

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest większe niż 160.

ZADANIE 3.A

Wyprowadź wzór na objętość ostrosłupa czworokątnego, którego wszystkie krawędzie są równej długości a.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$, więc $H = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

ZADANIE 3.B

Wyprowadź wzór na pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego,

Odpowiedź/wskazówka:

$P = a^2\sqrt{3}$.

ZADANIE 3.C

Wyprowadź wzór na objętość czworościanu foremnego.

Odpowiedź/wskazówka:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

6.2.3 Walec i stożek

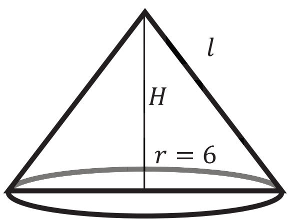
ZADANIE 1.A

Oblicz objętość stożka o promieniu podstawy $r = 6$ i kącie rozwarcia 90^0.

Rozwiązanie:

Ponieważ kąt rozwarcia wynosi 90^0, więc $H = r = 6$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = 72\pi.$



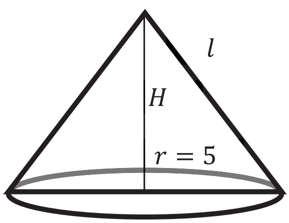
ZADANIE 1.B

Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy $r = 5$ i kącie rozwarcia 90^0.

Odpowiedź/wskazówka:

Ponieważ kąt rozwarcia wynosi 90^0, więc $H = r = 5$. Zatem $l = 5\sqrt{2}$.

$P = \pi r(r + l) = (25 + 5\sqrt{2})\pi.$



ZADANIE 1.C

Pole powierzchni bocznej walca wynosi 100π. Wyznacz jego objętość, jeśli długość promienia podstawy jest dwa razy większa od wysokości.

Odpowiedź/wskazówka:

$P = 2\pi rH = 100\pi$. Ponieważ $H = 2r$.

$P = 4\pi r^2 = 100\pi$.

$r = 5$.

$V = \pi r^2 H = 250\pi$.

ZADANIE 2.A

Oblicz objętość stożka o promieniu podstawy $r = 2$ i kącie rozwarcia 120^0.

Rozwiązanie:

Ponieważ kąt rozwarcia wynosi 120^0, więc $\frac{H}{r} = \mathrm{tg}\, 30^0$. Zatem $H = 2\sqrt{3}$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$.

ZADANIE 2.B

Oblicz objętość stożka, którego wysokość jest równa $H = 4$ i kąt rozwarcia wynosi 60^0.

Odpowiedź/wskazówka:

Ponieważ kąt rozwarcia wynosi 60^0, więc $\frac{H}{r} = \mathrm{tg} 60^0$. Zatem $r = 2\sqrt{3}$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = 16\pi$.

ZADANIE 2.C

Oblicz objętość stożka wynosi 72π, a wysokość jest równa $H = 6$. Wyznacz kąt rozwarcia stożka.

Odpowiedź/wskazówka:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = 72\pi$, więc $r = 6$. Zatem kat rozwarcia jest katem prostym.

ZADANIE 3.A

Trójkąt równoboczny o długości boku a obraca się wokół osi symetrii. Wyznacz wzór na pole całkowite i objętość powstałej figury.

Rozwiązanie:

Długość wysokość stożka wynosi: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Stąd $P = \pi r(r + l) = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a + a\right) = \frac{3a^2}{4}\pi,$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}\pi.$

ZADANIE 3.B

Kwadrat o długości boku a obraca się wokół osi symetrii nie zawierającej przekątnej. Wyznacz wzór na pole powierzchni całkowitej i objętość powstałej figury.

Odpowiedź/wskazówka:

$P = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a + a\right) = \frac{3a^2}{2}\pi,$

$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{4}\pi.$

ZADANIE 3.C

Kwadrat o długości boku a obraca się wokół przekątnej kwadratu. Wyznacz wzór na objętość powstałej figury.

Odpowiedź/wskazówka:

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\pi.$

6.2.4 Kula i sfera

ZADANIE 1.A

Oblicz objętość kuli o długości promienia $r = 4$.

Rozwiązanie:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi.$$

ZADANIE 1.B

Objętość kuli wynosi 36000π. Wyznacz długości promienia.

Odpowiedź/wskazówka:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36000\pi$, stąd $r^3 = 27000$, zatem $r = 30$.

ZADANIE 1.C

Pole powierzchni sfery wynosi 400π. Wyznacz długości promienia.

Odpowiedź/wskazówka:

$P = 4\pi r^2 = 400\,\pi$, $r^2 = 100$, zatem $r = 10$.

ZADANIE 2.A

Oblicz objętość figury powstałej między dwiema kulami o tym samym środku i różnicy promieni równej 3.

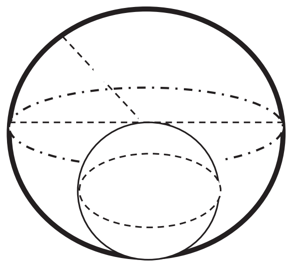
Rozwiązanie:

R- promień większej kuli, r- promień mniejszej kuli.

$V = \frac{4}{3}\pi(R - r)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi.$

ZADANIE 2.B

Oblicz stosunek objętości kuli o większym promieniu do objętości kuli o mniejszym promieniu.

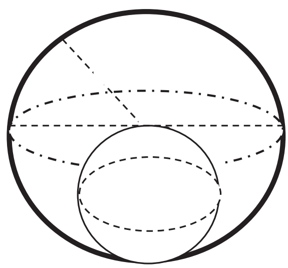


Odpowiedź/wskazówka:

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3} = 8.$

ZADANIE 2.C

Oblicz stosunek powierzchni kuli o większym promieniu do objętości kuli o mniejszym promieniu.



Odpowiedź/wskazówka:

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{6\pi R^2}{6\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 4.$

7 Statystyka, Rachunek prawdopodobieństwa

7.1 Dane statystyczne i ich parametry

ZADANIE 1.A

Wyznacz wariancję i odchylenie standardowe dla liczb $3, 7, 5$.

Rozwiązanie:

Średnia: $\bar{a} = 5$.

$$\sigma^2 = \frac{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+(a_3-\bar{a})^2}{3} = \frac{(3-5)^2+(7-5)^2+(5-5)^2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2\frac{2}{3}}$$

ZADANIE 1.B

Wyznacz średnią i medianę dla liczb: $2, 3, 8, 8, 5, 4, 1, 3$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$\bar{a} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_8}{8} = \frac{2+3+8+8+5+4+1+3}{8} = 4\frac{1}{4}.$$

Posortujmy: 1,2,3,3,4,5,8,8 , zatem mediana $\frac{3+4}{2}=3\frac{1}{2}$.

ZADANIE 1.C

Wyznacz średnią ważoną liczb $2, 5, 6$ z odpowiadającymi im wagami $3, 4, 3$.

Odpowiedź/wskazówka:

$$\bar{a}_w = \frac{n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3}{n_1+n_2+n_3} = \frac{3\cdot2+4\cdot5+3\cdot6}{3+4+3} = 4\frac{2}{5}.$$

ZADANIE 2.A

Uzasadnij, że dla liczb: $7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7$ odchylenie standardowe jest równe 0.

Rozwiązanie:

$(a_n - \bar{a})^2 = (7 - 7)^2 = 0$, dla $n = 1,2, \dots 15$.

ZADANIE 2.B

Za x podstaw odpowiednią liczbę, aby średnia z liczb $x, 9, 10, 10, 10, 10, \dots$,10 była większa niż 10.

Odpowiedź/wskazówka:

Warunek $x > 11$, np. $x = 12$.

ZADANIE 2.C

Za x podstaw odpowiednią liczbę aby średnia z liczb $x, 8{,}7{,}7{,}7{,}7, \dots$,7 była mniejsza niż 7.

Odpowiedź/wskazówka:

Warunek $x < 6$, np. $x = 5$.

ZADANIE 3.A

Wiadomo, że dla liczb:

a) 7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7
b) 7,7,7,7,7,7,7
c) 4,4,4,4,4,4,4,4
d) 5,5,5,5,5,5

odchylenie standardowe jest równe 0.

Na podstawie tych danych postaw hipotezę.

Rozwiązanie:

Dla dowolnego ciągu jednakowych liczb odchylenie standardowe jest zawsze równe 0.

ZADANIE 3.B

Suma n-początkowych wyrazów pewnego ciągu wyraża się wzorem $S_n = (101 - n)^4 + 99(101 - n)^2 + 3n$. Wyznacz średnią dla 100 początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź/wskazówka:

$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}}{100} = \frac{S_{100}}{100} = \frac{1+99+300}{100} = 4.$

ZADANIE 3.C

Suma n-początkowych wyrazów pewnego ciągu wyraża się wzorem $S_n = n^3 - 7n^2 + 3n$. Wyznacz średnią dla k początkowych wyrazów.

Odpowiedź/wskazówka:

$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = \frac{S_k}{k} = \frac{k^3 - 7k^2 + 3k}{k} = k^2 - 7k + 3.$

7.2 Elementy rachunku prawdopodobieństwa

ZADANIE 1.A

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy jednocześnie dwie cyfry. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby parzystej, zdarzenie B na wylosowaniu liczby większej niż 30. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$.

Rozwiązanie:

$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 32, 31, 34, 35, 43, 42, 41, 45, 54, 53, 52, 51\}$,

$\mathrm{A} = \{12, 14, 24, 32, 34, 42, 54, 52\}$,

$\mathrm{B} = \{32, 31, 34, 35, 43, 42, 41, 45, 54, 53, 52, 51\}$,

$A \cup B = \{12, 14, 24, 32, 31, 34, 35, 43, 42, 41, 45, 54, 53, 52, 51\}$

$P(A \cup B) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

ZADANIE 1.B

Ze zbiory $\{2, 4, 6, 8\}$ losujemy jednocześnie dwie cyfry. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby podzielnej przez 3, zdarzenie B na wylosowaniu liczby podzielnej przez 4. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$.

Odpowiedź/wskazówka:

$\Omega = \{24, 26, 28, 42, 46, 48, 62, 64, 68, 82, 84, 86\}$,

$\mathrm{A} = \{24, 42, 48, 84\}$,

$\mathrm{B} = \{24,28,48,64,68,84\}$,

$A \cap B = \{24, 48, 84\}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

ZADANIE 1.C

Ze zbiory $\{1, 3, 4, 5\}$ losujemy jednocześnie dwie cyfry. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby parzystej, zdarzenie B na wylosowaniu liczby większej niż 20. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \backslash B$.

Odpowiedź/wskazówka:

$\Omega = \{13, 14, 15, 31, 34, 35, 41, 43, 45, 51, 53, 54\}$,

$\mathrm{A} = \{14, 34, 54\}$,

$\mathrm{B} = \{31, 34, 35, 41, 43, 45, 51, 53, 54\}$,

$A \backslash B = \{14\}$

$P(A \backslash B) = \frac{1}{12}$.

ZADANIE 2.A

Ze zbiory cyfr $\{0, 1, 2, 3\}$ tworzymy liczby dwucyfrowe o powtarzających się cyfrach. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby parzystej. Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Rozwiązanie:

$\Omega = \{10, 12, 13, 20, 21, 23, 30, 31, 32, 11, 22, 33\}$,

$\mathrm{A} = \{10, 12, 20, 30, 32, 22\}$,

$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

ZADANIE 2.B

Ze zbiory cyfr $\{0, 1, 2, 4\}$ tworzymy liczby trzycyfrowe o niepowtarzających się cyfrach. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby podzielnej przez 3.Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Odpowiedź/wskazówka:

$\Omega = \{102, 104, 120, 124, 140, 142, 201, 204, 210, 214, 240, 241,$
$401, 402, 410, 412, 420, 421\}$,

$\mathrm{A} = \{102, 120, 201, 204, 210, 240, 402, 420\}$,

$P(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$.

ZADANIE 2.C

Ze zbiory cyfr $\{0, 1, 2, 4\}$ tworzymy liczby trzycyfrowe o niepowtarzających się cyfrach. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby podzielnej przez 6.Oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Odpowiedź/wskazówka:

$\Omega =$
$\{102, 104, 120, 124, 140, 142, 201, 204, 210, 214, 240, 241, 401, 402, 410, 412, 420, 421\}$,

$\mathrm{A} = \{102, 120, 204, 210, 240, 402 ,420\}$,

$P(A) = \frac{7}{18}$.

ZADANIE 3.A

Niech $A, B \subset \Omega -$ przestrzeń zdarzeń elementarnych. Uzasadnij, że jeśli $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, to $P(A \cap B) \geq \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

$1 = P(\Omega) \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - P(A \cap B)$.

Zatem $P(A \cap B) \geq \frac{1}{2}$.

ZADANIE 3.B

Niech $A, B \subset \Omega -$ przestrzeń zdarzeń elementarnych. Uzasadnij, że jeśli $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, to $P(A \cup B) \leq \frac{3}{4}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$.

ZADANIE 3.C

Niech $A, B \subset \Omega -$ przestrzeń zdarzeń elementarnych. Uzasadnij, że jeśli $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, to $P(A \backslash B) \geq \frac{1}{2}$.

Odpowiedź/wskazówka:

$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) \geq P(A) - P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

8 Projekt „e-matura”

8.1 Wstęp

Ponad 10 lat temu w Polsce wprowadzono system egzaminów zewnętrznych. Do dnia dzisiejszego egzaminy sprawdzane są metodą tradycyjną. Uczniowie piszą egzaminy na przygotowanych arkuszach, następnie egzaminy sprawdzane są przez egzaminatorów. Obecnie Centralna Komisja Egzaminacyjna rozpoczęła próby wdrażania tzw. e-oceniania. System e-oceniania, to taki system, który umożliwia sprawdzanie prac egzaminacyjnych przez egzaminatora nie poprzez przeglądanie papierowych dokumentów, lecz na ekranie monitora. System taki należy rozumieć, jako aplikację webową zapewniającą autoryzowany dostęp przez Internet. Dzięki takiemu rozwiązaniu możliwe jest sprawne organizowanie pracy dla egzaminatorów. E-ocenianie umożliwia przejście od punktowania przez egzaminatorów całych prac obejmujących od kilku do kilkudziesięciu zadań do specjalizacji w ocenianiu poszczególnych zadań. System e-oceniania został już na dużą skalę wprowadzony między innymi w Wielkiej Brytanii czy Stanach Zjednoczonych. Doświadczenia, jakie zdobyły w tym obszarze cztery duże komisje egzaminacyjne w tych krajach (AQA, OCR i EDEXCEL – Wielka Brytania; ETS – Stany Zjednoczone) pozwalają stwierdzić, że przejście od oceniania tradycyjnego do e-oceniania wiąże się nie tylko ze zmianą organizacji procesu przygotowania prac do oceniania, ale również poprawia jego jakość.

Projekt E-matura jest kolejnym krokiem rozwoju egzaminów zewnętrznych w stosunku do e-oceniania. Takie rozwiązania do tej pory nie funkcjonują ani w Europie, ani na Świecie na taką skalę. Przez realizację tego projektu chcemy pokazać, że pierwsze próby wdrożenia mogą funkcjonować w Polsce już za cztery lata. Decyzja będzie należała do MEN. Pierwszy krok wdrożenia e-matury jest możliwy w tzw. dodatkowym terminie matury – tzw. Próbna matura, w którym w Polsce zdaje około 2 tysięcy uczniów (rok 2011) ze wszystkich przedmiotów (około 150 z matematyki).

8.2 Czym jest e-matura?

Projekt e-matura stanowi nowoczesny i innowacyjny system egzaminacyjny w skali kraju, który pozwala rozwiązywać dotychczasowe problemy, jakie występowały podczas przeprowadzania egzaminów, w nowy sposób. System pozwala na przeprowadzanie egzaminów maturalnych z matematyki z wykorzystaniem komputerów podłączonych do Internetu. Przebieg egzaminu jest bardzo zbliżony do zwykłego egzaminu maturalnego, w którym uczniowie zasiadają o ustalonej godzinie przed komputerami i przystępują jednocześnie do pisania egzaminu. Po wystartowaniu egzaminu przez ucznia uzyskuje on dostęp do pytań egzaminacyjnych zaprezentowanych w nowoczesnej multimedialnej formie. W przypadku, gdy uczeń nie do końca rozumie, w jaki sposób dany typ zadania ma zostać rozwiązany może skorzystać z kontekstowej pomocy przypisanej do każdego pytania.

Użytkownikami systemu e-matura będą docelowo uczniowie klas maturalnych, którzy będą mogli wykorzystać umieszczane w systemie materiały i egzaminy do podnoszenia wiedzy i lepszego przygotowania do egzaminu urzędowego. System został przygotowany w taki sposób, aby mogli z niego korzystać uczniowie również z miejscowości, gdzie dostęp do Internetu jest na słabszym poziomie (częste przerwania połączenia, słaba przepustowość łączy) – poprzez wykorzystanie aplikacji typu „grupy klient". Dzięki temu każdy ze zdających egzamin na platformie e-matura ma jednakowe szanse i zdaje na takich samych zasadach bez względu, z jakiej miejscowości przystępuje do udziału w projekcie. Ponadto system zakłada wsparcie dla osób niepełnosprawnych poprzez dostosowanie interfejsu użytkownika do osób niedowidzących.

Zadania egzaminacyjne można sklasyfikować, jako tzw. zamknięte i otwarte. Zadanie zamknięte składa się z dystraktorów (wzorców błędnych odpowiedzi) i jednego lub kilku werstraktorów (wzorców prawidłowych odpowiedzi). W zadaniach otwartych samodzielnie formułuje się i zapisuje odpowiedzi. Stosowanie zadań zamkniętych jest wygodne pod kątem tworzenia systemu automatycznego oceniania, zarówno w przypadku skanowania formularzy z rozwiązaniami jak i systemów egzaminów online.

Projekt e-matura jest budowany w sposób na tyle uniwersalny, że jest w stanie obsłużyć egzaminy również z innych przedmiotów takich jak fizyka czy geografia. System może służyć również do bieżącej nauki wspierając nauczycieli i uczniów podczas całego procesu dydaktycznego. Ponieważ e-matura jest systemem informatycznym, który wykorzystując zaawansowane algorytmy sprawdzania pytań może mocno uprościć i wspomóc pracę nauczyciela, dzięki czemu uczniowie będą mogli rozwiązywać samodzielnie większą ilość zadań i na bieżąco sprawdzać swoje możliwości bez potrzeby sprawdzania wszystkich prac przez nauczyciela.

Nauczyciel ma również dostęp do raportów tworzonych automatycznie w systemie e-matura, dzięki czemu może przez cały czas śledzić postępy danego ucznia i sprawdzać, w jakich dziedzinach uczeń ma problemy i musi się jeszcze poprawić. Aplikacja umożliwia bardzo rozbudowany system raportowania. Oprócz standardowego wyniku logowane są również takie dane jak ilość wejść ucznia w dane pytanie, czas rozwiązywania danego pytania, jak często uczeń korzystał z pomocy kontekstowej podczas rozwiązywania danego pytania. Dzięki takim informacjom zarówno nauczyciele jak i osoby przygotowujące egzaminy maturalne mogą jeszcze lepiej dostosowywać układane pytania, aby zostały jak najlepiej zrozumiane przez zdających egzamin.

Projekt e-matura jest innowacyjnym podejściem do tematu egzaminowania uczniów na dużą skalę z wykorzystaniem systemu opartego o sieć Internet. Zastosowanie projektu do przeprowadzenia egzaminu maturalnego niesie za sobą pewne wymagania dotyczące daty i godziny, w której taki egzamin się odbywa. Aby zapewnić równość i jednolite zasady zdawania dla wszystkich uczestników projektu system musi umożliwiać jednoczesne przystąpienie do egzaminu przez bardzo dużą liczbę użytkowników. Aby sprostać takim wymaganiom system został zaprojektowany z wykorzystaniem rozproszonej infrastruktury zarówno od strony bazy danych jak i aplikacji udostępnianej użytkownikom.

Baza danych jest kluczowym elementem projektu, który zapewnia dostęp do tajnych aż do chwili startu egzaminu pytań oraz miejsca, w którym są odkładane udzielone przez użytkowników odpowiedzi. Baza danych została zbudowana z wykorzystaniem silnika bazy danych Microsoft SQL Server 2008 R2. Aby zapewnić odpowiednią szybkość działania został do tego celu zbudowany klaster złożony z dwóch fizycznych serwerów bazodanowych podłączonych poprzez sieć SAN do współdzielonej macierzy opartej na twardych dyskach z interfejsem SAS. Serwery bazodanowe zostały odseparowane fizycznie od sieci Internet i są dostępne tylko za pośrednictwem aplikacji udostępnianej przez serwery aplikacyjne. Zastosowanie technologii klastrowej zapewnia dużą wydajność oraz bezpieczeństwo – w przypadku fizycznej awarii jednego z serwerów drugi z powodzeniem przejmuje jego rolę i serwuje dalej usługi tak, aby użytkownik końcowy nawet się nie zorientował, że wystąpiły jakieś problemy techniczne. Ponieważ w bazie danych odkładane są wszelkie informacje o aktywności użytkownika podczas egzaminu (odpowiedzi – nawet jeśli użytkownik zmieni odpowiedź, każda udzielona przez niego odpowiedź jest oddzielnie zapisywana do późniejszej analizy, czas udzielania odpowiedzi, ilość wejść w dane pytanie, informacje o korzystaniu z kontekstowej pomocy technicznej itd.) wymagana jest duża wydajność działania silnika bazodanowego. Podczas testów projektu przeprowadzonych w kwietniu 2011, w których wzięło udział 2349 uczniów ze szkół z woj. łódzkiego udało się zmierzyć obciążenie bazy danych na poziomie około 10-15% wykorzystania sprzętu, który został zakupiony na potrzeby projektu. Na podstawie testów syntetycznych przeprowadzonych z użyciem serwerów, które przeprowadzały kontrolowane ataki DDOS na serwery bazodanowe projektu e-matura wynika, że zakupiony sprzęt powinien sprostać liczbie około 25 do 30 tysięcy (dla porównania liczba maturzystów podchodzących pierwszy raz do matury w woj. łódzkim z 2011 wynosiła 22315)[2] jednoczesnych użytkowników odwołujących się do bazy danych przez aplikację e-matura.

[2] Dane z OKE Łódź

Biorąc pod uwagę wyniki testów syntetycznych oraz wprowadzane cały czas optymalizacje w systemie zakupiony na potrzeby projektu sprzęt powinien sprostać wymaganiom przeprowadzenia egzaminu maturalnego dla wszystkich maturzystów z województwa łódzkiego. Zwiększanie liczby użytkowników będzie wymagało inwestycji w rozbudowę sprzętu.

Aplikacja e-matura jest interfejsem użytkownika, przez który uczniowie komunikują się z bazą danych pobierając pytania oraz udzielając na nie odpowiedzi. Aplikacja została zbudowane w oparciu o model tzw. grubego klienta z wykorzystaniem technologii Silverlight 4.0. Zastosowanie takiego modelu umożliwiło zbudowanie dużo bezpieczniejszej aplikacji, a także znaczące zwiększenie wygody korzystania z aplikacji przez zdających egzamin uczniów. Aplikacja jest uruchamiana z poziomu przeglądarki WWW i z punktu widzenia użytkownika cały czas działa jak strona sieci web. Jest to jednak aplikacja w modelu grubego klienta, co oznacza, że cała aplikacja jest pobierana na lokalny komputer użytkownika i działa całkowicie autonomicznie. Interfejs użytkownika jest tak samo responsywny dla użytkowników podłączonych do Internetu łączem o dużej przepustowości jak i dla tych, którzy mają dużo słabsze łącza, czego nie dałoby się osiągnąć przy wykorzystaniu standardowej strony WWW, gdyż użytkownicy ze słaby podłączeniem do Internetu dużo dłużej musieliby czekać na przeładowywanie się stron z kolejnymi pytaniami. Aplikacja e-matura niweluje ten problem, przez co znacząco zwiększa równość szans przy zdawaniu egzaminu przez wszystkich użytkowników. Aplikacja już na samym początku pobiera wszystkie pytania i odwołuje się do serwera tylko w przypadku udzielania odpowiedzi na dane pytanie. Jeśli nawet łączność z Internetem zostanie przerwana na chwilę odpowiedzi użytkownika są zapisywane w pamięci podręcznej aplikacji i gdy tylko łączność z serwerem zostaje odzyskana aplikacja wysyła wszystkie dane w tle, nie wpływając w żaden sposób na pracę użytkownika.

Środowisko fizyczne, które jest wykorzystywane do serwowania aplikacji e-matura zostało stworzone w oparciu o 4 serwery wykorzystujące system operacyjny Microsoft Windows 2008 R2. Serwerem, który serwuje aplikację dla użytkowników końcowych oraz pośredniczy w komunikacji pomiędzy aplikacją, a serwerem bazy danych jest IIS w wersji 7.5. Ponadto jest jeszcze jeden serwer pełniący rolę tzw. „load balancer'a", do którego kierowana są wszystkie odwołania użytkowników, którzy uruchamiają aplikację. Serwer ten kieruje zapytania użytkowników do serwerów udostępniających aplikację w taki sposób, aby jak najlepiej rozłożyć obciążenie pomiędzy 4 serwery aplikacyjne zapewniając w ten sposób maksymalną wydajność serwowania danych. Wykorzystanie infrastruktury rozproszonej zwiększa ponadto bezpieczeństwo korzystania z aplikacji poprzez zabezpieczenie przed awarią sprzętową. W przypadku awarii jednego z serwerów zapytania, które były do niego kierowane są przekierowywane do pozostałych serwerów, które automatycznie przejmują jego rolę.

Projekt e-matura został zbudowany w sposób innowacyjny, aby jak najlepiej spełnić wymagania stawiane przed egzaminami maturalnymi z matematyki i nie tylko. Projekt jest budowany w taki sposób, aby był jak najbardziej uniwersalny i mógł być wykorzystywany po wprowadzeniu pewnych przeróbek również w zastosowaniu do innych przedmiotów.

E-Matura jest systemem egzaminacyjnym czasu rzeczywistego pozwalająca na przeprowadzenie wybranego egzaminu dla dużej próbki uczniów w jednym czasie. Dzięki zastosowaniu nowoczesnych rozwiązań z dziedziny informatyki system pozwala na przeprowadzenie interaktywnego egzaminu dla kilkudziesięciu tysięcy osób. System został stworzony na potrzeby przeprowadzenia egzaminu maturalnego z matematyki jednak jest elastyczna architektura pozwala na dostosowanie go do każdej innej dziedziny nauki czy sztuki.

8.3 Cele projektu

Zakłada się, że celem głównym projektu jest dostarczenie innowacyjnego narzędzia służącego do dokonania zmian w metodach nauczania i uczenia się, będącego jednocześnie narzędziem pozwalającym na weryfikację zdobytej wiedzy, dzięki zastosowaniu możliwości sprawdzania poziomu zdobytej wiedzy za pośrednictwem interaktywnej platformy i zgromadzonego tam materiału jak, również statystycznej analizy zbieranych wyników.

Przy założeniu celu głównego sprecyzowane zostały następujące cele szczegółowe projektu:

- *Dostarczenie odbiorcom możliwości na wyrównania lub podniesienia poziomu posiadanej wiedzy w zakresie matematyki, jak również zweryfikowanie jej i ocenienie*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów, którzy podnieśli swój poziom posiadanej wiedzy z matematyki.

Źródłem danych będzie przeprowadzenie badań podłużnych wśród użytkowników platformy. Te same osoby podchodzić będą do egzaminu z matematyki za pośrednictwem platformy e-matura, co najmniej dwa razy. Pozwoli to porównać osiągane przez nie wyniki i stwierdzić, w jakim stopniu podniosły one swój poziom wiedzy i umiejętności z zakresu matematyki.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeżeli zostanie stwierdzone, że co najmniej 960 uczniów podniesie swój poziom wiedzy z matematyki.

- *Dostarczenie użytkownikom możliwości wykorzystania innowacyjnego narzędzia celem podniesienia atrakcyjności prowadzonych form nauczania, a tym samym przełamywania istniejących w tym zakresie stereotypów.*

Wskaźnikiem osiągniecia celu będzie stopień wykorzystania platformy e-matura zarówno przez nauczycieli jak i uczniów.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w etapie testowania projektu.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki i 64 nauczycieli zdeklaruje, że uzyskała innowacyjne możliwości wykorzystania platformy e-matura.

- *Dostarczenie użytkownikom instytucjonalnym, przy zachowaniu poufności, możliwości zbierania i analizowania danych*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek dyrektorów/nauczycieli, którzy będą wykorzystywać gromadzone po każdym egzaminie dane dotyczące osiąganych przez uczniów wyników.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie dyrektorów i nauczycieli ze szkół uczestniczących w projekcie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 64 dyrektorów/nauczycieli z 32 placówek zadeklaruje chęć wykorzystywania zgromadzonego dzięki platformie materiału.

- *Otwarcie się szkół ponadgimnazjalnych na działania innowacyjne doprowadzające do udostępniania gromadzonej na uczelniach wyższych wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek szkół zainteresowanych udziałem w projekcie.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych zarówno wśród szkół biorących udział w etapie testowania jak również szkół losowo wybranych, które nie wzięły udziału w tym etapie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki zadeklarują chęć wzięcia udziału w projekcie.

- *Zwiększenie zainteresowania uczniów szkół ponadgimnazjalnych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów biorących udział w badaniu ankietowym, który uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją nauki na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie użytkowników platformy e-matura. Badania te przeprowadzone będą dla każdego uczestnika dwukrotnie: najpierw podczas badania w klasie przedmaturalnej a później w klasie maturalnej, dlatego można będzie porównać odpowiedzi przed korzystaniem z platformy jak i po e-egzaminie.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeśli 20% biorących udział w ankiecie uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

8.4 W jaki sposób nasz projekt może pomóc?

Elektroniczna forma przeprowadzania egzaminów rozwiązuje wiele problemów.

1. Przede wszystkim **zmniejszone zostaną koszty przeprowadzenia egzaminu** gdyż poza jednorazowym wydatkiem na sprzęt, oprogramowanie i jego utrzymanie następne egzaminy mogą się już odbywać **przy minimalnych kosztach eksploatacyjnych**. Ponadto znikają też koszty, jakie należy ponieść na opłacenie nauczycieli sprawdzających prace egzaminacyjne,
2. **Dostarczenie pytań do jednostek egzaminujących jest w pełni bezpieczne i poufne** automatyczne i działa na zasadzie szyfrowania kluczem asymetrycznym pochodzącym z certyfikatów wystawionych przez autoryzowane jednostki certyfikujące. Dzięki takiemu podejściu pytania docierają bezpiecznie do odbiorcy bez możliwości ich „wycieku". Serwery z danymi są włączane do sieci dopiero w momencie uruchomienia e-matury. Co eliminuje wcześniejsze włamania hakerów.
3. Elektroniczna matura pozwala uzyskać **natychmiastowy wynik,** ponieważ system według zadanych parametrów dokona analizy i sprawdzenia prac dostarczając do ucznia wynik zaraz po zakończonym egzaminie dając egzaminowanej osobie o wiele większy komfort psychiczny.
4. Elektroniczna matura **znacząco ogranicza możliwość „ściągania"**.
5. Kolejnym elementem, na jaki pozwala elektroniczne egzaminowanie jest **zbieranie danych statystycznych o czasie trwania i liczbie powtórzeń poszczególnych czynności** w trakcie rozwiązywania egzaminu. Co umożliwia doskonalenie zadań ulepszanie dydaktyki, gdyż każdy nauczyciel otrzyma **dane, wskazujące w jakim obszarze uczeń ma największe braki, aby można było je jeszcze odpowiednio wcześnie skorygować**. Uzyskanie takich informacji z matur tradycyjnych nie jest możliwe. W systemie gromadzone będą wyniki umożliwiające prowadzenie badań statystycznych przez użytkowników produktu, a odbiorcom wskażą obszary, w których występują braki wiedzy potrzebnej do zdania egzaminu maturalnego z matematyki. Przeprowadzenie egzaminu maturalnego w wersji elektronicznej z wykorzystaniem budowanego systemu informatycznego daje dodatkowe możliwości zbierania i analizy danych. w przeprowadzonej w kwietniu 2011 próbnej e-maturze system egzaminacyjny zapisywał m. in. następujące informacje:
   1) Liczbę prób rozwiązania danego zadania;
   2) Sumaryczny czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem (razem we wszystkich próbach);
   3) Oczywiście liczba punktów uzyskanych za zadanie. w przypadku braku punktów za zadanie system rozróżniał sytuacje:

   a) uczeń próbował rozwiązywać i uzyskał 0 punktów,

   b) uczeń nie podjął próby podania odpowiedzi.

Czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem jak i liczbę prób rozwiązania danego zadania można traktować, obok liczby punktów uzyskanych za zadanie, jako swoiste miary trudności zadania. Patrzenie na uzyskaną przez uczniów punktację z uwzględnieniem w/w danych oraz np. informacji na temat liczby uczniów, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania pozwala wyciągnąć o wiele więcej wniosków niż byłoby to możliwe tylko w oparciu samą punktację.

Informacje te są cenne zarówno dla egzaminatorów jak i nauczycieli oraz uczniów.

Na podstawie przeprowadzonej krótkiej analizy nasuwają się nam następujące wnioski:

- skumulowana informacja o punktacji, czasie rozwiązania i liczbie powrotów do danego zadania mogą stanowić cenne wskazówki dla nauczyciela i ucznia. Nawet zadowalająca punktacja za zadanie przy dużej liczbie powrotów do zadania i długim czasie rozwiązania mogą świadczyć o zbyt słabym wyćwiczeniu i ugruntowaniu danej partii materiału;
- fakt braku podejmowania próby rozwiązania danego zadania np. na egzaminie maturalnym mimo zgodności treści zadania z podstawą programową powinien być sugestią dla egzaminatorów , aby być może zmienić formę zadania;
- informacje o średnim czasie rozwiązania danego zadania (szerzej – zadania danego typu) pomogą lepiej dopasować czas egzaminu do rzeczywistego poziomu trudności zadań (tzn. poziomu trudności z punktu widzenia ucznia).[3]

6. **wykorzystanie infrastruktury informatycznej szkół**
7. **ułatwienie dostępu osób niepełnosprawnych do egzaminów**

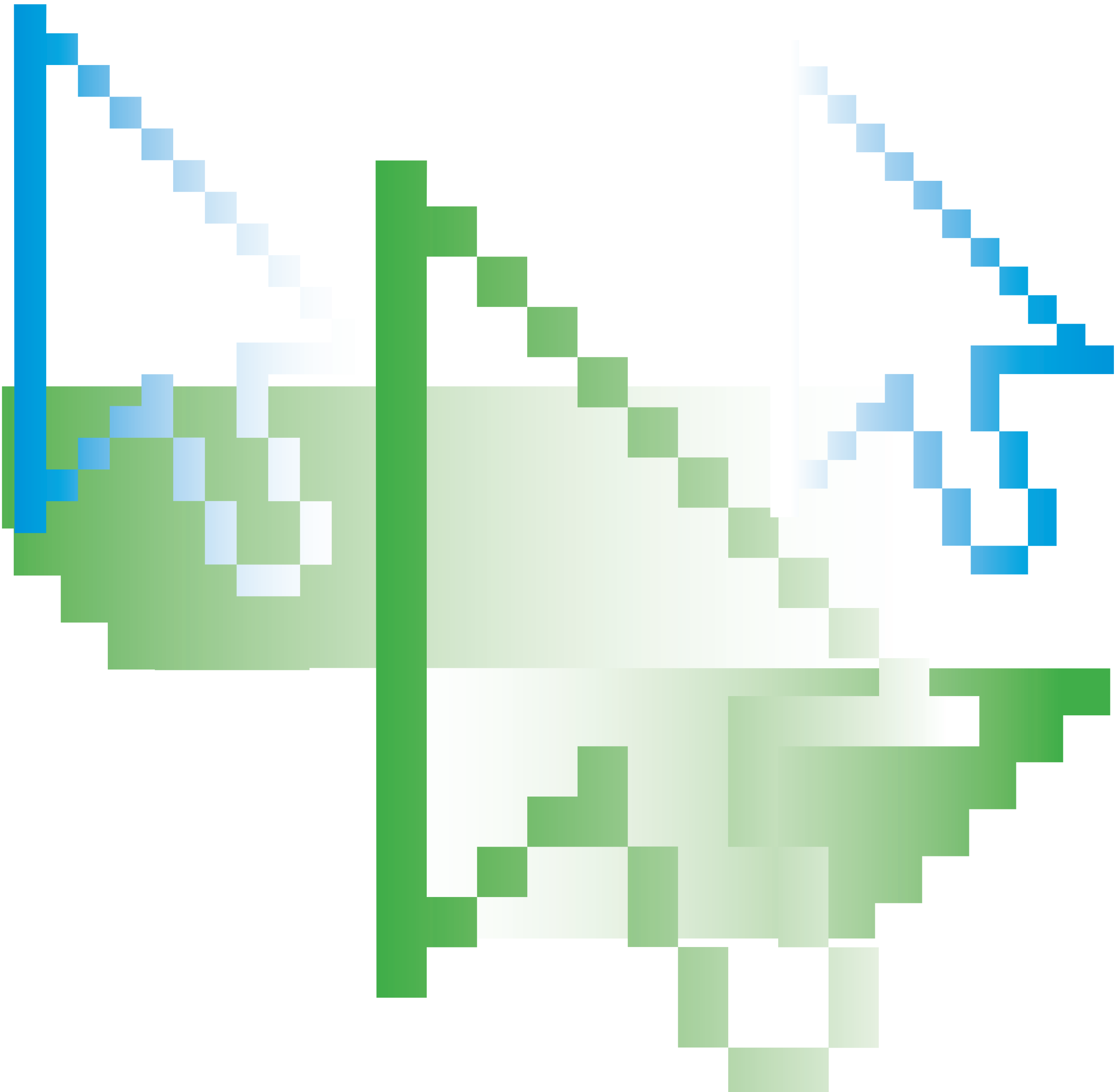
[3] Badania własne, raport w załączeniu (załącznik 4)

8.5 Grupy, które mogą korzystać ze wsparcia

Założenia projektu wskazują, iż finalnie z wypracowanej, przetestowanej i udostępnionej platformy będą korzystali uczniowie klas maturalnych z terenu województwa łódzkiego przystępujący do egzaminu maturalnego z matematyki. Jak zostało wspomniane wcześniej na etapie testowania do grupy docelowej zostaną włączeni także uczniowie klas przedostatnich (drugich w przypadku liceum, trzecich w przypadku technikum)

Platforma zostanie udostępniona również uczniom z niepełnosprawnościami. Grupa docelowa to również wszyscy uczniowie szkół ponadgimnazjalnych, którzy wobec braku możliwości korzystania z zajęć dodatkowych lub też chcący na bieżąco weryfikować posiadaną wiedzę dzięki oferowanemu, innowacyjnemu wsparciu będą mogli przeciwdziałać dysproporcjom występującym w poziomie przekazywanej w szkole wiedzy jak również w nierównym dostępie do zajęć pozalekcyjnych.

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.



ISBN 978-83-937551-1-0

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie