PRÓBNA NOWA MATURA z WSiP

Matematyka dla klasy 2

Poziom rozszerzony

Zasady oceniania zadań

Kartoteka testu

Numer zadania	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe Uczeń:	Maksymalna liczba punktów
1	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3) wykorzystuje definicję logarytmu (1.6) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej (1.1R)	1
2	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (3.9R)	1
3	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje w obliczeniach wzory na logarytm potęgi oraz na zamianę podstawy logarytmu (1.2R)	1
4	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych (3.6R)	1
5	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2)	1
6	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2)	1
7	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	oblicza średnią arytmetyczną liczb (gim.)	2
8	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów (6.5R)	2
9	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1)	2
10	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	wykorzystuje związki miarowe w trójkątach o równych polach (szk. podst. i gim.) stosuje trygonometrię do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości brył (9.6)	3
11	III. Modelowanie matematyczne	rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias (2.3R)	4
12	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje trygonometrię do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości brył (9.6)	4
13	V. Rozumowanie i argumentacja	rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias (2.3R)	5

14	IV. Użycie i tworzenie strategii	rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem (3.2R)	5
15	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1)	6
16	V. Rozumowanie i argumentacja	korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi (7.4)	6

Schemat oceniania zadań zamkniętych

Numer zadania	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Poprawna odpowiedź	D	B	A	D	A	D
Punktacja	0–1	0–1	0–1	0–1	0–1	0–1

Za każdą poprawną odpowiedź – **1 punkt**.

Schemat oceniania zadań z kodowaną odpowiedzią

Numer zadania	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Poprawna odpowiedź	576	425	011	738 461	014 050	154 204 (203)
Punktacja	0–2	0–2	0–2	0–3	0–4	0–4

Zadania 7., 8. i 9.
Za poprawne zakodowanie liczby – **2 punkty**.

Zadanie 10.
Za poprawne zakodowanie jednej liczby – **2 punkty**.
Za poprawne zakodowanie obu liczb – **3 punkty**.

Zadania 11. i 12.
Za poprawne zakodowanie jednej liczby – **2 punkty**.
Za poprawne zakodowanie obu liczb – **4 punkty**.

Schemat oceniania zadań otwartych

UWAGA OGÓLNA

- Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przewidziana w schemacie punktowania należy przyznać zdającemu maksymalną liczbę punktów.
- Za częściowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie rozwiązania należy przyznać zdającemu liczbę punktów adekwatną do wykonanych czynności.

Zadanie 13. (0–5)

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej nieparzystej k liczba k^3-k jest podzielna przez 24.

Rozwiązanie

Założenie: Liczba $k=2n+1$, gdzie $n\in N$.
Teza: $k^3-k=24p$, gdzie $p\in N$.

Dowód:
$k^3-k=(k-1)k(k+1)$

Z równości $k^3-k=(k-1)k(k+1)$ wynika, że k^3-k można przedstawić w postaci iloczynu trzech kolejnych liczb naturalnych.
Z trzech kolejnych liczb naturalnych jedna z nich dzieli się przez 3, czyli $k^3-k=3l$, gdzie $l\in N$.
Ponieważ k jest liczbą nieparzystą, to można ją przedstawić w postaci $k=2n+1$ i $n\in N$.
W takim razie $k^3-k=(k-1)k(k+1)=2n(2n+1)(2n+2)=4n(n+1)(2n+1)$.
Z powyższej równości wynika, że $k^3-k=4n(n+1)(2n+1)$.
W tym iloczynie dwa czynniki są kolejnymi liczbami naturalnymi. Z dwóch kolejnych liczb naturalnych jedna jest liczbą podzielną przez 2.
W takim razie $k^3-k=4n(n+1)(2n+1)=4\cdot 2m(2n+1)=8m(2n+1)$, gdzie $m\in N$.
Wykazano więc, że liczba k^3-k dzieli się i przez 3, i przez 8. Obydwie te liczby są względnie pierwsze, więc liczba k^3-k dzieli się przez iloczyn tych liczb, a więc dzieli się przez 24.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania **1 punkt.**

Zapisanie twierdzenia i zapisanie liczby k^3-k w postaci iloczynu $k(k-1)(k+1)$.

Rozwiązanie, w którym jest postęp **2 punkty.**

Zauważenie, że k^3-k jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych $k^3-k=(k-1)k(k+1)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp **3 punkty.**

Wykazanie podzielności przez 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **4 punkty.**

Wykazanie podzielności przez 8.

Rozwiązanie pełne **5 punktów.**

Wyciągnięcie wniosku o podzielności iloczynu przez 24.

Zadanie 14. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-4mx+3m^2-3m+10=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m$.

<u>**Rozwiązanie**</u>

Zapisanie warunków, jakie muszą być spełnione, aby równanie $x^2-4mx+3m^2-3m+10=0$ miało dwa różne pierwiastki takie, że $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m$.

$$\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m\end{cases}$$

Rozwiązanie układu nierówności lub każdej nierówności oddzielnie.

Rozwiązanie nierówności $\Delta>0$

$16m^2-4\left(3m^2-3m+10\right)>0$

$m^2+3m-10>0$

$(m-2)(m+5)>0$

Zatem $m\in(-\infty;-5)\cup(2;+\infty)$.

Nierówność $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m$ można przekształcić do postaci $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<2m$.

Korzystając ze wzorów Viète'a, otrzymuje się nierówność $\frac{4m}{3m^2-3m+10}<2m$.

Jest ona równoważna nierówności $3m^3-3m^2+8m>0$, stąd $m\left(3m^2-3m+8\right)>0$.

Rozwiązaniem nierówności jest $m\in(0,\ +\infty)$.

Wspólna część otrzymanych zbiorów rozwiązań nierówności jest rozwiązaniem zadania.

$$\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-5)\cup(2;+\infty)\\ m\in(0;+\infty)\end{cases}$$

Stąd $m\in(2;+\infty)$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym jest postęp **1 punkt.**

Rozwiązanie warunku $\Delta>0$ lub zapisanie wyrażenia $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ w postaci $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$.

Rozwiązanie, w którym jest postęp **2 punkty.**

Rozwiązanie warunku $\Delta>0$ i zapisanie wyrażenia $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ w postaci $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3 punkty.**

Zapisanie nierówności $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m$ w postaci $3m^3-3m^2+8m>0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **4 punkty.**

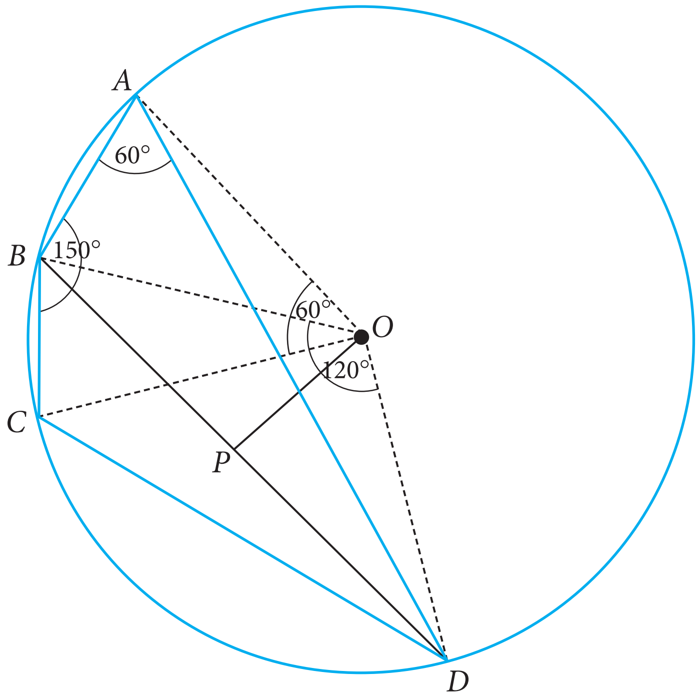
Rozwiązanie pełne **5 punktów.**

$m \in (2;\ +\infty)$

Zadanie 15. (0–6)

W okrąg wpisano czworokąt, którego dwa kąty mają miary 60° i 150°. Przekątna czworokąta leżąca naprzeciw mniejszego z tych kątów ma długość 8 cm. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym czworokącie oraz długość drugiej przekątnej tego czworokąta.

Rozwiązanie



Niech kąty wewnętrzne czworokąta spełniającego warunki zadania mają rozwartość odpowiednio $|\sphericalangle A| = 60°$ i $|\sphericalangle B| = 150°$. Wówczas $|\sphericalangle C| = 120°$, a $|\sphericalangle D| = 30°$.

Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany o wierzchołku w A ma więc miarę 120°, trójkąt BOD jest trójkątem równoramiennym, a jego ramiona są promieniami okręgu opisanego na tym czworokącie. Pozostałe dwa kąty w tym trójkącie mają rozwartości po 30°. Wysokość OP dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty prostokątne. Odcinek BP ma długość 4.
Z definicji funkcji sinus w trójkącie prostokątnym otrzymuje się równość

$$\sin|\sphericalangle POB| = \frac{|PB|}{|OB|}.$$

Stąd $|OB| = \dfrac{|PB|}{\sin|\sphericalangle POB|}$, a po podstawieniu wartości $|OB| = \dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Zatem promień okręgu opisanego na danym czworokącie ma długość $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Trójkąt ACO jest trójkątem równoramiennym o ramionach OA i OC.
Kąt między ramionami OA i OC ma rozwartość 60°, bo jest to kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany o wierzchołku D. Zatem trójkąt AOC jest trójkątem równobocznym.

Przekątna AC tego czworokąta ma długość $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

__Schemat oceniania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 punkt.

Wykonanie rysunku i wyznaczenie miar kątów czworokąta.

Rozwiązanie, w którym jest postęp 2 punkty.

Wyznaczenie długości odcinka BP (patrz: rysunek).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 3 punkty.

Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na czworokącie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 punkty.

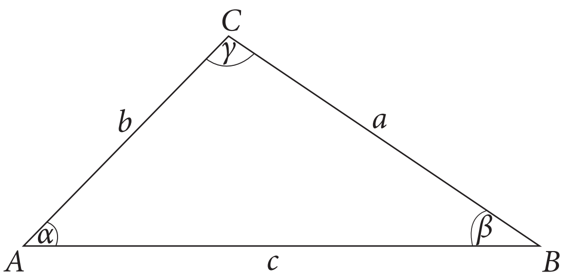
Uzasadnienie, że trójkąt AOC jest trójkątem równobocznym.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 punktów.

Rozwiązanie pełne 6 punktów.

Obliczenie długości przekątnej AC.

Zadanie 16. (0–6)



Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c i kątach o miarach α, β i γ (patrz: rysunek). Uzasadnij, że pole tego trójkąta wyraża się wzorem $P_\Delta = \frac{c^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin\gamma}$.

__Rozwiązanie__

Twierdzenie
Założenie: a, b, c – długości boków trójkąta, α, β, γ – rozwartości odpowiednich kątów trójkąta.

Teza: $P_\Delta = \frac{c^2 \sin\beta \cdot \sin\alpha}{2\sin\beta}$

Dowód:

Gdy znane są długości boków trójkąta i miary kątów w trójkącie, to pole tego trójkąta można obliczyć na trzy sposoby:

$P_\Delta = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$, $P_\Delta = \frac{1}{2} ac\sin\beta$, $P_\Delta = \frac{1}{2} bc\sin\alpha$.

Z tych równości można otrzymać układ $\begin{cases} \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} \\ P_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} \end{cases}$ i dalej $\begin{cases} b\sin\gamma = c\sin\beta \\ P_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} \end{cases}$.

Następnie można obliczyć b z pierwszego równania układu $\begin{cases} b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} \\ P_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} \end{cases}$.

Skąd po podstawieniu za b w drugim równaniu układu otrzymuje się równość

$P_\Delta = \frac{c^2 \sin\beta \sin\alpha}{2\sin\alpha}$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 punkt.

Ustalenie założeń i tezy twierdzenia.

Rozwiązanie, w którym jest postęp 2 punkty.

Zapisanie odpowiednich zależności.

$P_\Delta = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$, $P_\Delta = \frac{1}{2} ac\sin\beta$, $P_\Delta = \frac{1}{2} bc\sin\alpha$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 3 punkty.

Pierwsze przekształcenie otrzymanego układu równań.

$$\begin{cases} \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} \\ P_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 5 punktów.

Kolejne przekształcenie otrzymanego układu równań.

$\begin{cases} b\sin\gamma = c\sin\beta \\ P_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} \end{cases}$ **(1 punkt)**

Wyznaczenie b w zależności od c: $\begin{cases} b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} \\ P_\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} \end{cases}$. **(1 punkt)**

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 punktów.

Rozwiązanie pełne 6 punktów.

Otrzymanie równości $P_\Delta = \dfrac{c^2 \sin\beta \cdot \sin\alpha}{2\sin\alpha}$.

Źródło ilustracji:
WSiP