6. Informacja o egzaminie maturalnym z matematyki dla absolwentów niesłyszących

6.1. EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI DLA ABSOLWENTÓW NIESŁYSZĄCYCH

Egzamin maturalny z matematyki dla absolwentów niesłyszących sprawdza – podobnie jak w przypadku arkusza standardowego – w jakim stopniu absolwent spełnia wymagania z zakresu tego przedmiotu określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla IV etapu edukacyjnego w zakresie rozszerzonym i podstawowym. W zadaniach zestawu egzaminacyjnego mogą też być sprawdzane wymagania z etapów wcześniejszych.

Ogólne informacje o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015, krótka charakterystyka arkusza egzaminacyjnego oraz najważniejsze zasady dotyczące oceniania wypowiedzi zdających, przedstawione w częściach 1. – 3. *Informatora*, dotyczą również arkuszy dla absolwentów niesłyszących. Jednak zgodnie z zapisami odpowiedniego rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej[1], absolwenci niepełnosprawni przystępują do egzaminu maturalnego w warunkach i formie dostosowanych do rodzaju ich niepełnosprawności.

Dostosowania obejmują:

- w odniesieniu do formy egzaminu maturalnego m.in.
  - zmianę sposobu sformułowania niektórych zadań (zamiana słów, zwrotów lub całych zdań), jeżeli mogłyby one być niezrozumiałe lub błędnie zrozumiane przez osoby niesłyszące (nie dotyczy to terminów typowych dla danej dziedziny wiedzy),
  - zmianę schematu punktowania niektórych zadań,
- w odniesieniu do warunków przeprowadzania egzaminu maturalnego m.in.
  - przedłużenie czasu przewidzianego na przeprowadzenie egzaminu,
  - możliwość korzystania ze słowników językowych.

Poniżej przedstawione zostały przykładowe zadania ilustrujące dostosowania dla absolwentów niesłyszących. Numeracja zadań odpowiada numeracji zadań w części 4. i 5. Jeżeli zadanie nie zostało przedstawione poniżej, oznacza to, że wersja dla niesłyszących nie różni się niczym od wersji przedstawionej w wyżej wymienionych częściach.

Szczegółowa informacja na temat zakresu dostosowania **warunków** przeprowadzania egzaminu maturalnego dla absolwentów niesłyszących ogłaszana jest w komunikacie Dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sierpniu poprzedzającym rok szkolny, w którym jest przeprowadzany egzamin maturalny, na stronie internetowej CKE.

[1] Tj. § 7 ust. 1 rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 17 listopada 2010 r. w sprawie warunków organizowania kształcenia, wychowania i opieki dla dzieci i młodzieży niepełnosprawnych oraz niedostosowanych społecznie w przedszkolach, szkołach i oddziałach ogólnodostępnych lub integracyjnych (Dz.U. Nr 228, poz. 1490, z późn. zm.).

6.2. Podstawowe zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych

W **zadaniach krótkiej odpowiedzi** zdający otrzymuje 1 lub 2 punkty za rozwiązanie, którego nie doprowadził do końca lub w którym zrobił błędy; określony jest jednak minimalny postęp, które w tym rozwiązaniu musi być osiągnięty, by otrzymać 1 punkt, oraz co powinno być w rozwiązaniu, by można było je ocenić na 2 punkty.

W rozwiązaniach zadań rozszerzonej odpowiedzi zostaje wyróżniona najważniejsza faza, nazywana **pokonaniem zasadniczych trudności zadania**. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie zdający otrzymałby za bezbłędne rozwiązanie tego zadania. Tak więc w zadaniu za 4 punkty, za pokonanie zasadniczych trudności przyznajemy 2 lub 3 punkty (zależnie od zadania). W zadaniu za 5 punktów za pokonanie zasadniczych trudności zadania na ogół przyznajemy 3 punkty. W zadaniach za 6 punktów – na ogół 3 lub 4 punkty. Wyróżnienie w rozwiązaniu zadania rozszerzonej odpowiedzi fazy pokonania zasadniczych trudności zadania powoduje następnie wyróżnienie kilku innych faz. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżniamy jeszcze jedną lub dwie fazy je poprzedzające: dokonanie niewielkiego postępu, który jednak jest konieczny dla rozwiązania zadania oraz dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania. Zdający, który pokonał zasadnicze trudności zadania, mógł na tym poprzestać lub mógł kontynuować rozwiązanie. Wyróżniamy ważną kategorię rozwiązań, w których zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i kontynuował rozwiązanie do końca, jednak w rozwiązaniu zrobił błędy niewpływające na poprawność całego rozumowania (na przykład nieistotne dla całego rozumowania błędy rachunkowe lub niektóre błędy nieuwagi). Tak samo wyróżniamy kategorię pokonania zasadniczych trudności z nieistotnymi błędami. W każdym przypadku określana jest liczba punktów przyznawana za rozwiązania w każdej (lub niektórych) z powyższych kategorii. Należy podkreślić, że schemat oceniania rozwiązania zadania jest traktowany jako integralna część zadania; na ogół ten schemat oceniania uwzględnia wszystkie typowe sposoby rozwiązania i czasami również niektóre nietypowe.

Zatem w zadaniu za 3 punkty:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu...0 pkt
2. rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania ....1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie ....2 pkt
4. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ....3 pkt

Natomiast w zadaniu za 4 punkty:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ....0 pkt
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, lub w czasie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały zrobione błędy, usterki ....1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym skończył lub błędnie kontynuował rozwiązanie ....2 pkt
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu są błędy, usterki ....3 pkt
5. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ....4 pkt

Poniżej zamieszczone zostały przykładowe sposoby przydziału punktów za poszczególne fazy rozwiązania **zadań rozszerzonej odpowiedzi**.

Najprostszy podział punktów za rozwiązanie zadania za 5 punktów wygląda następująco:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ....0 pkt
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania .... 1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w czasie ich pokonywania zostały zrobione błędy ....2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie ....3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu zadania są usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) ....4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ....5 pkt

A oto inny przydział punktów w zadaniu za 5 punktów :

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ....0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w czasie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały zrobione błędy, usterki ....2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie ....3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu są usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) ....4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ....5 pkt

Przykładowy sposób przydziału punktów w zadaniu za 6 punktów:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu ....0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania ....2 pkt
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w czasie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały zrobione błędy, usterki ....3 pkt
5. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie ....4 pkt
6. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale w rozwiązaniu zadania są usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) ....5 pkt
7. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie ....6 pkt

Poniżej zamieszczone zostały przykłady zadań wraz z rozwiązaniami, opisem sposobu przyznawania punktów i uwagami, które mogą być pomocne w lepszym zrozumieniu sposobu oceniania na poziomie rozszerzonym.

6.3. Przykłady zadań wraz z rozwiązaniami i opisem sposobu przyznawania punktów

Zadanie I (0–3)

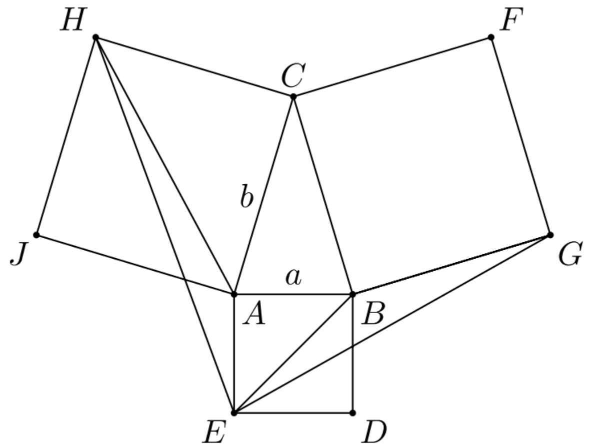
Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na bokach, na zewnątrz trójkąta ABC, zbudowano kwadraty $ABDE$, $BCFG$ i $ACHJ$. Udowodnij, że pola trójkątów AHE i BEG są równe.

Rozwiązanie

Omówimy cztery sposoby rozwiązania tego zadania.

Sposób I (trygonometryczny)

Przyjmijmy oznaczenia:



$$|AB| = |AE| = a, \quad |AC| = |BC| = |BG| = b, \quad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha.$$

Rozwiązanie tym sposobem polega na obliczeniu dwóch szukanych pól za pomocą a, b i α. Mamy bowiem:

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| \cdot \sin EAH\,,$$

$$P_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BG| \cdot \sin EBG\,.$$

Zauważmy, że: $|AE| = a$ oraz $|BG| = b$. Obliczamy długości odcinków AH i BE oraz wyrażamy za pomocą α miary kątów EAH i EBG.

Mamy:

$$|AH| = b\sqrt{2}\,,$$

$$|BE| = a\sqrt{2}\,.$$

Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny i ostrokątny, więc $\alpha > 45^\circ$. Następnie

$$|\sphericalangle EAB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAH| = 90^\circ + \alpha + 45^\circ = 135^\circ + \alpha > 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

a więc kąt wypukły EAH jest równy

$$360^\circ - \left(135^\circ + \alpha\right) = 225^\circ - \alpha.$$

Podobnie,

$$|\sphericalangle GBC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle EBA| = 90^\circ + \alpha + 45^\circ = 135^\circ + \alpha > 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

a więc kąt wypukły EBG jest równy

$$360^\circ - \left(135^\circ + \alpha\right) = 225^\circ - \alpha.$$

Zatem

$$|\sphericalangle EAH| = 225^\circ - \alpha = |\sphericalangle EBG|.$$

Stąd otrzymujemy

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| \cdot \sin EAH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\sqrt{2} \cdot \sin\left(225^\circ - \alpha\right)$$

oraz

$$P_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BG| \cdot \sin EBG = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot b \cdot \sin\left(225^\circ - \alpha\right).$$

Stąd wynika, że $P_{AHE} = P_{BEG}$, co kończy dowód.

Komentarz

Rozwiązanie składa się z trzech kroków: obliczenie długości boków AH i BE, udowodnienie równości kątów EAH i EBG (np. przez wyznaczenie obu kątów za pomocą α) oraz zastosowanie wzoru na pole trójkąta.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu wszystkich wielkości potrzebnych we wzorach na pole. Jeden z możliwych błędów zdających, na który należy zwrócić tu uwagę, może polegać na złym zastosowaniu wzoru na pole trójkąta (np. pominięcie współczynnika $\frac{1}{2}$). Pomimo tego błędu zdający otrzymuje poprawny wynik. W takim przypadku uznajemy rozwiązanie za niedokończone – bezbłędnie zostały pokonane tylko zasadnicze trudności zadania.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... **1 pkt**

Obliczenie długości boków AH i BE za pomocą boków AB i AC

lub

udowodnienie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... **2 pkt**

Obliczenie długości boków AH i BE za pomocą boków AB i AC oraz udowodnienie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Udowodnienie, że pola obu trójkątów są równe.

Uwagi

Zdający może wykonać obliczenia związane tylko z jednym z dwóch trójkątów i na tym skończyć. Na przykład, w przypadku trójkąta AHE może wykonać następujące obliczenia (przyjmując oznaczenia $|AB| = a, |AC| = b, |\sphericalangle BAC| = \alpha$):

- $|AH| = b\sqrt{2}$;
- $|\sphericalangle EAH| = 225° - \alpha$;
- $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(225° - \alpha)$.

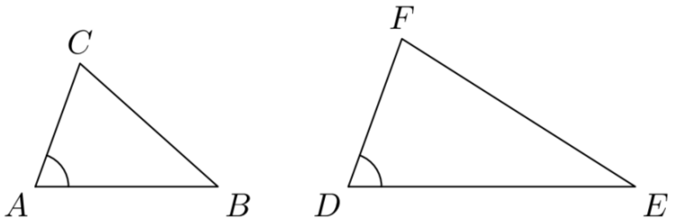
Wówczas:

- jeśli zdający wyznaczy tylko długość boku AH lub miarę kąta EAH, to takie rozwiązanie nie jest jeszcze traktowane jako istotny postęp i przyznajemy za nie 0 punktów,
- jeśli zdający wyznaczy długość boku AH i miarę kąta EAH, to takie rozwiązanie częściowe traktujemy jako „istotny postęp" i przyznajemy za nie 1 punkt,
- jeśli zdający wyznaczy bok AH i zapisze pole w postaci $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot ab\sqrt{2} \cdot \sin EAH$, nie wyznaczając przy tym kąta EAH za pomocą kąta α, to takie rozwiązanie częściowe traktujemy także jako „istotny postęp" i przyznajemy za nie 1 punkt,
- jeśli zdający wyznaczy bok AH, wyznaczy kąt EAH za pomocą kąta α i zapisze pole trójkąta AHE w postaci $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot ab\sqrt{2} \cdot \sin(225° - \alpha)$, to traktujemy takie rozwiązanie jako pokonanie zasadniczych trudności zadania i przyznajemy za nie 2 punkty.

Sposób II (stosunek pól)

W tym rozwiązaniu korzystamy z następującej własności trójkątów:

Dane są dwa trójkąty ABC i DEF takie, że $\sphericalangle A = \sphericalangle D$



Wówczas

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|}.$$

Powyższa proporcja wyraża w sposób czysto geometryczny tę samą treść co wzór trygonometryczny na pole trójkąta. Mianowicie mamy:

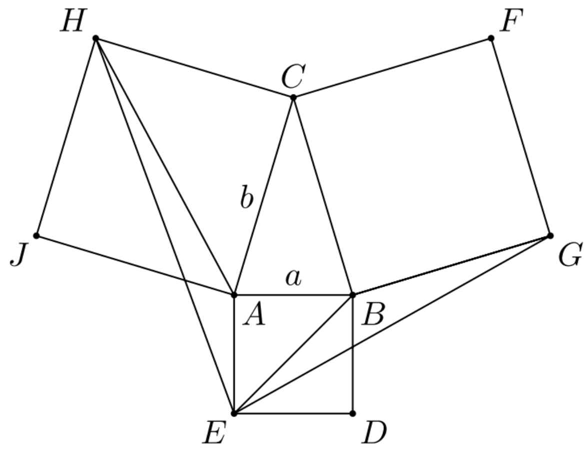
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A$$

oraz

$$P_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin D.$$

Sformułowanie geometryczne pozwala przeprowadzić dowód bez odwoływania się do trygonometrii.

Tak jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.



Następnie korzystamy ze wspomnianej wyższej własności trójkątów:

$$\frac{P_{AHE}}{P_{BEG}} = \frac{|AE| \cdot |AH|}{|BE| \cdot |BG|} = \frac{|AE| \cdot |AC| \cdot \sqrt{2}}{|AB| \cdot \sqrt{2} \cdot |BG|} = \frac{|AE|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|BG|} = 1,$$

co dowodzi, że $P_{AHE} = P_{BEG}$.

Korzystając z oznaczeń z poprzedniego sposobu rozwiązania, możemy to rozwiązanie zapisać w sposób następujący. Przyjmujemy $|AB| = a$ i $|AC| = b$. Wówczas $|AH| = b\sqrt{2}$ oraz

$|EB| = a\sqrt{2}$. Tak jak w sposobie I, pokazujemy, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$. Korzystając z twierdzenia o stosunku pól otrzymujemy

$$\frac{P_{AHE}}{P_{BEG}} = \frac{|AE| \cdot |AH|}{|BE| \cdot |BG|} = \frac{a \cdot b\sqrt{2}}{a \cdot b\sqrt{2}} = 1,$$

co dowodzi, że $P_{AHE} = P_{BEG}$.

Komentarz

W tym sposobie rozwiązania podstawowym zadaniem jest – tak jak w sposobie pierwszym – obliczenie długości odcinków AH i BE oraz wykazanie równości kątów EAH i EBG. Dlatego schemat oceniania może być taki sam jak w sposobie I. Uwagi dotyczące rozwiązań niekompletnych są właściwie takie same jak w przypadku sposobu I.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 1 pkt

Obliczenie długości boków AH i BE za pomocą boków AB i AC

lub

wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie długości boków AH i BE za pomocą boków AB i AC oraz wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Wykorzystanie wzoru trygonometrycznego do obliczenia pól obu trójkątów i wykazania, że te pola są równe.

Uwaga

Jeśli zdający wykonuje obliczenia tylko w jednym z rozważanych trójkątów, to w istocie rozwiązuje zadanie sposobem pierwszym i korzystamy ze schematu oceniania w sposobie I.

Sposób III (geometria analityczna)

Rozwiązanie zadania sposobem analitycznym składa się z trzech kroków. Po pierwsze, w wygodny sposób umieszczamy rozważane figury geometryczne w układzie współrzędnych – lub równoważnie – do istniejących figur dobieramy układ współrzędnych. Po drugie, w przyjętym układzie współrzędnych obliczamy współrzędne potrzebnych punktów. Wreszcie, za pomocą obliczonych współrzędnych, obliczamy wielkości, o które chodzi w zadaniu.

W naszym przypadku te kroki sprowadzają się do:

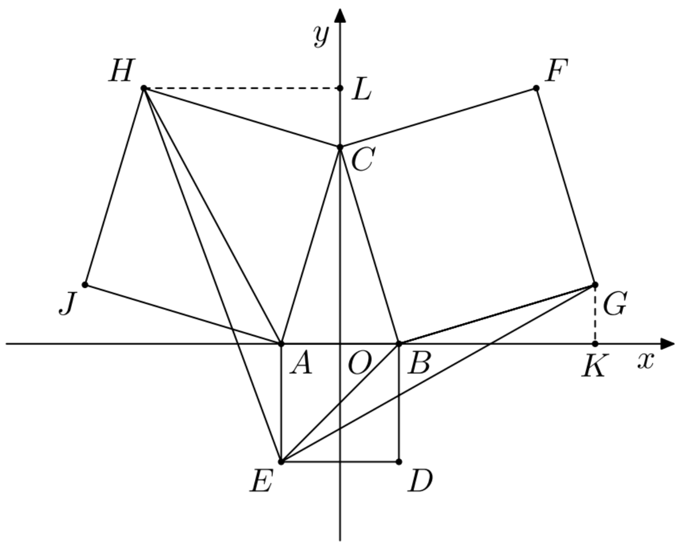
- wyboru układu współrzędnych;
- obliczenia współrzędnych wierzchołków trójkątów *AHE* i *BEG*;
- obliczenia pól trójkątów *AHE* i *BEG*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu współrzędnych wierzchołków trójkątów *AHE* i *BGE*.

Popatrzmy teraz, w jaki sposób można przeprowadzić takie rozwiązanie. Najpierw musimy wybrać układ współrzędnych. Można to zrobić na wiele sposobów; trudności obliczeniowe zadania będą zależały od sposobu wyboru układu. Jednym z najwygodniejszych sposobów jest wybór układu współrzędnych uwzględniający naturalne symetrie figur występujących w zadaniu. W naszym przypadku wybieramy układ tak, by oś *Oy* zawierała oś symetrii trójkąta równoramiennego *ABC*. Umieszczamy zatem trójkąt *ABC* w układzie współrzędnych tak, że

$$A=(-a,0),\quad B=(a,0),\quad C=(0,h),$$

gdzie $a>0$ i $h>0$. Ponieważ trójkąt *ABC* jest ostrokątny, więc $|\sphericalangle BAC|>45^\circ$, skąd wynika, że $a<h$.



Wyznaczamy teraz współrzędne punktów *E*, *G* i *H*. Oczywiście bok *AB* ma długość $2a$, skąd wynika, że $E=(-a,-2a)$. Współrzędne punktów *G* i *H* możemy wyznaczyć wieloma sposobami. Pokażemy dokładnie dwa z nich i zasygnalizujemy trzeci sposób, znacznie bardziej pracochłonny.

- Korzystamy z tego, że jeśli obrócimy wektor $\left[x,y\right]$ o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to otrzymamy wektor $\left[y,-x\right]$. (Tę własność można łatwo odczytać z rysunku i zapamiętać.) W naszym zadaniu mamy $\overrightarrow{CA}=\left[-a,-h\right]$, skąd $\overrightarrow{CH}=\left[-h,a\right]$. Stąd dostajemy $H=C+\overrightarrow{CH}=\left(0,h\right)+\left[-h,a\right]=\left(-h,a+h\right)$.

  W podobny sposób:

$$\overrightarrow{BC}=\left[-a,h\right],\quad \overrightarrow{BG}=\left[h,a\right],\quad G=\left(a+h,a\right).$$

- Niech *K* będzie rzutem punktu *G* na oś *Ox* i niech *L* będzie rzutem punktu *H* na oś *Oy*. Wówczas trójkąty *CLH* i *GKB* są przystające do trójkąta *AOC*, skąd

$$|CL|=|GK|=a,\quad |HL|=|BK|=h.$$

  To daje współrzędne punktów $G=\left(a+b,a\right)$ i $H=\left(-h,a+h\right)$.

- Wyznaczamy równanie prostej *AC*: $y=\frac{h}{a}x+h$ oraz równanie prostej prostopadłej do niej, przechodzącej przez punkt *C*: $y=-\frac{a}{h}x+h$. Następnie na tej prostej prostopadłej znajdujemy oba punkty odległe od punktu *C* o długość odcinka *AC*; jest to najbardziej pracochłonna część zadania. Wreszcie wybieramy ten z otrzymanych dwóch punktów, który ma ujemną współrzędną *x*. W podobny sposób możemy wyznaczyć współrzędne punktu *G*.

Następnie obliczamy pola trójkątów *AHE* i *BEG*. Możemy skorzystać ze wzoru znajdującego się w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych*. Jeśli wierzchołki trójkąta *KLM* mają współrzędne

$$K=\left(x_K,y_K\right),\quad L=\left(x_L,y_L\right),\quad M=\left(x_M,y_M\right),$$

to pole wyraża się wzorem

$$P_{KLM}=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(x_L-x_K\right)\left(y_M-y_K\right)-\left(y_L-y_K\right)\left(x_M-x_K\right)\right|.$$

W naszym przypadku mamy

$$E=\left(-a,-2a\right),\quad A=\left(-a,0\right),\quad H=\left(-h,a+h\right),$$

skąd dostajemy

$$P_{AHE}=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(-a+a\right)\left(a+h+2a\right)-\left(0+2a\right)\left(-h+a\right)\right|=\left|-a\left(a-h\right)\right|=a\left(h-a\right).$$

Podobnie,

$$E=\left(-a,-2a\right),\quad B=\left(a,0\right),\quad G=\left(a+h,a\right),$$

skąd dostajemy

$$P_{BEG}=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(a+a\right)\left(a+2a\right)-\left(0+2a\right)\left(a+h+a\right)\right|=\frac{1}{2}\left|6a^2-4a^2-2ah\right|=a\left(h-a\right).$$

To kończy dowód.

Zauważmy też, że pole trójkąta AHE można obliczyć prościej: podstawa AE ma długość $2a$, wysokość (niezaznaczona na rysunku) ma długość $h-a$.

Uwaga

Pola trójkątów można też obliczyć inaczej. Można np. wyznaczyć długość jednego boku, równanie prostej zawierającej ten bok oraz odległość trzeciego wierzchołka od tej prostej (odpowiednie wzory także znajdują się w tablicach).

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 1 pkt

Umieszczenie trójkąta ABC w układzie współrzędnych i podanie współrzędnych jego wierzchołków.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów E, G i H.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

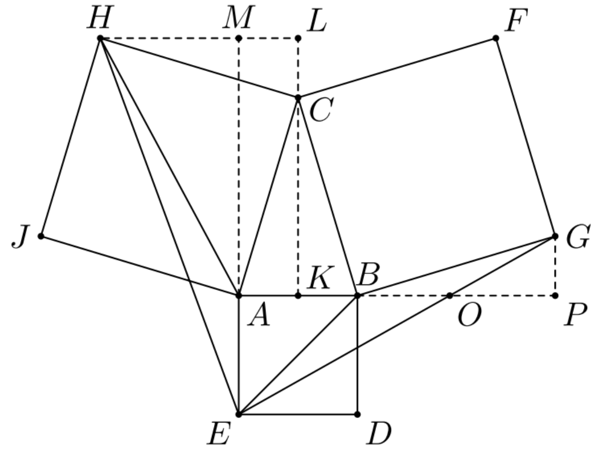
Obliczenie pól trójkątów AHE i BEG np. za pomocą wzorów znajdujących się w tablicach i zauważenie, że te pola są równe.

Uwaga

Zdający rozwiązujący zadanie tym sposobem mogą popełnić bardzo wiele różnych błędów: na przykład, mogą źle wyznaczyć współrzędne punktów E, G i H lub mogą źle obliczyć pola trójkątów. Mogą wreszcie wybrać takie metody obliczania pól, że nie będzie oczywiste, czy otrzymane wyniki są równe (może to wymagać odpowiednich przekształceń). Niezależnie od charakteru i przyczyny błędu, schemat oceniania wyraźnie wskazuje, jaką liczbę punktów należy przyznać zdającemu. Maksymalną liczbę punktów zdający otrzymuje za bezbłędnie wykonane kroki. Może się jednak zdarzyć, że zdający popełni nieistotny błąd rachunkowy przy wyznaczaniu współrzędnych któregoś punktu i w ten sposób uzyska błędne wyniki w ostatnim kroku. Jeśli jednak metoda obliczania pól trójkątów jest poprawna, zostały dokonane poprawne podstawienia do wzorów, zgodne z otrzymanymi wynikami obliczeń oraz obliczenia w tym kroku zostały wykonane poprawnie, to zdający otrzymuje 2 punkty (jest to sytuacja, w której zdający doprowadza rozwiązanie do końca, popełniając nieistotny błąd rachunkowy podczas pokonywania zasadniczych trudności).

Sposób IV (bezpośrednie obliczenie pól)

Prowadzimy w trójkącie *ABC* wysokość *CK*. Następnie niech punkt *L* będzie rzutem punktu *H* na prostą *KC* i niech punkt *P* będzie rzutem punktu *G* na prostą *AB*.



Wówczas widać, że trójkąty *CLH* i *BPG* są przystające do trójkątów *AKC* i *BKC*. Mianowicie $|CH| = |AC| = |BC| = |BG|$. Jeśli następnie

$\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$,

to $|\sphericalangle ACK| = 90° - \alpha$, $|\sphericalangle HCL| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CHL| = 90° - \alpha$. Podobnie, $|\sphericalangle BCK| = \alpha$, $|\sphericalangle GBP| = 90° - \alpha$ oraz $|\sphericalangle BGP| = \alpha$. Wspomniane przystawania trójkątów wynikają teraz z cechy przystawania *kbk*.

Przyjmijmy oznaczenia:

$a = |AK| = |BK|, \quad h = |CK|$.

Wówczas $|HL| = |BP| = h$ oraz $|CL| = |GP| = a$. Ponadto $a < h$. Niech następnie punkt *M* będzie rzutem punktu *A* na prostą *HL*. Ponieważ $a < h$, więc punkt *M* leży wewnątrz odcinka *HL*. Możemy już obliczyć pole trójkąta *EAH*. Mianowicie

$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |HM| = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (h - a) = a(h - a)$.

Następnie niech punkt *O* będzie punktem przecięcia prostych *EG* i *AP*. Z podobieństwa trójkątów *EAO* i *GPO* wynika, że

$$\frac{|AO|}{|PO|} = \frac{|AE|}{|PG|} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Zatem

$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot |AP| = \frac{2}{3} \cdot (2a + h),$$

skąd wynika, że

$$|BO| = |AO| - |AB| = \frac{2}{3} \cdot (2a + h) - 2a = \frac{2}{3} \cdot (h - a).$$

Wreszcie

$$P_{EBG} = P_{EBO} + P_{GBO} = \frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|AE| + \frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|GP| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(h-a)\cdot(2a+a) = a(h-a).$$

To kończy dowód.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 1 pkt

Dorysowanie trójkątów *CLH* i *GPB* oraz zauważenie, że są one przystające do trójkąta *AKC* (lub *BKC*). Nie wymagamy w tym miejscu od zdającego pełnego dowodu przystawania; przyjmujemy, że uzasadnienie przystawania jest oczywiste.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie pola jednego z trójkątów *AHE* i *BEG*.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Obliczenie pól obu trójkątów i stwierdzenie, że są one równe.

Uwaga

W takim sposobie rozwiązania zadania jest mało prawdopodobne, by zdający popełnił istotny błąd. Mogą być rozwiązania niedokończone. Mogą też być różne inne próby rozwiązania polegające na dorysowywaniu do rysunku różnych odcinków. Jeśli nie jest wyraźnie widoczny cel takich poszukiwań i nie został on wyraźnie wskazany w rozwiązaniu, to zdający otrzymuje 0 punktów.

Zadanie II (0–5)

Ile jest nieparzystych liczb naturalnych trzycyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest dziewiątką?

Rozwiązanie

Omówimy 6 sposobów rozwiązania tego zadania.

Sposób I (umieszczenie dziewiątki)

W tym sposobie rozwiązania pokażemy najpierw rozumowanie błędne polegające na policzeniu kilkakrotnym tych samych liczb. Wskazany błąd jest bardzo często popełniany przez uczniów rozwiązujących to zadanie; można go jednak dość łatwo naprawić. Wystarczy odjąć liczbę tych liczb, które były policzone dwa razy i odjąć podwojoną liczbę tych liczb, które były policzone trzy razy. Obliczenie, ile należy odjąć, jest dość łatwe. Problem polega jednak na tym, że uczniowie popełniający ten błąd nie zdają sobie sprawy z tego, na czym on polega – nie dostrzegają, że niektóre liczby policzyli wielokrotnie.

A oto rozwiązanie. Wiemy, że jedną z cyfr jest 9; możemy ją umieścić na jednym z trzech miejsc: pierwszym, drugim lub trzecim.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 10 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 50 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 45 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na drugim dowolną z 10 cyfr. Łącznie daje to w tym przypadku 90 liczb.

W sumie daje to $50+45+90=185$ liczb.

Które liczby zostały policzone wielokrotnie? Popatrzmy na przykład. Przypuśćmy, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na pierwszym miejscu, a na pozostałych miejscach umieściliśmy kolejno cyfry 5 i 9. Otrzymaliśmy liczbę 959. Przypuśćmy teraz, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na trzecim miejscu, a następnie umieściliśmy na pierwszych dwóch miejscach kolejno cyfry 9 i 5. Znów otrzymaliśmy liczbę 959. Ta liczba została więc w powyższym sposobie zliczania policzona dwukrotnie. Zobaczmy teraz, w jaki sposób można poprawić to rozwiązanie błędne.

Dostaliśmy wynik 185. Zauważmy jednak, że liczby z dwiema dziewiątkami były policzone po dwa razy, a liczba 999 nawet trzy razy. Zliczamy teraz liczby z dwiema dziewiątkami.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8).
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8).

W sumie okazuje się, że mamy 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Od otrzymanego wyniku musimy zatem odjąć 21. Następnie mamy jedną liczbę (mianowicie 999) z trzema dziewiątkami. Policzyliśmy ją trzykrotnie, więc od otrzymanego wyniku musimy jeszcze odjąć 2. Zatem liczb, które nas interesują, jest $185-21-2=162$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Pokazane na początku rozwiązanie błędne zawiera istotne elementy rozumowania prawidłowego, więc powinno być ocenione jako rozwiązanie częściowe. Uznajemy je za „istotny postęp".

Postęp niewielki .... 1 pkt

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb.

Istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb, że przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb i że przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb. Nie wymagamy, by w tej kategorii otrzymał wynik łączny 185 liczb.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający otrzyma wynik 185 liczb, następnie zauważy, że pewne liczby policzono wielokrotnie oraz obliczy, że 21 liczb policzono dwukrotnie. Za samo zauważenie, że pewne liczby zostały policzone wielokrotnie, bez podania prawidłowej ich liczby (na przykład w wyniku błędnego obliczenia), zdający otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania, zauważy, że liczba 999 była policzona trzykrotnie i obliczy poprawnie liczbę wszystkich rozważanych liczb:

$$50+45+90-21-2=162.$$

Sposób II (pierwsza dziewiątka)

Wszystkie interesujące nas liczby dzielimy na trzy grupy i policzymy liczby w każdej grupie.

- Do pierwszej grupy zaliczamy liczby zaczynające się dziewiątką.
- Do drugiej grupy zaliczamy liczby, w których pierwsza dziewiątka znajduje się na drugim miejscu.
- Do trzeciej grupy zaliczamy liczby, w których pierwsza dziewiątka znajduje się na trzecim miejscu.

Teraz zliczamy liczby znajdujące się w tych grupach.

- W pierwszej grupie znajduje się 50 liczb: na pierwszym miejscu jest dziewiątka, na drugim dowolna z 10 cyfr i na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W drugiej grupie znajduje się 40 liczb: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (nie może być 0 i 9), na drugim miejscu jest dziewiątka i na trzecim jedna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W trzeciej grupie znajdują się 72 liczby: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (jak wyżej), na drugim jedna z 9 cyfr (nie może być 9) i na trzecim miejscu znajduje się dziewiątka.

Łącznie mamy zatem 162 liczby.

Komentarz

Zdający rozwiązujący zadanie tą metodą pewnie wie o niebezpieczeństwie i prawdopodobnie nie popełni większych błędów. Możliwe są natomiast drobne błędy rachunkowe.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Postęp niewielki .... 1 pkt

Zdający prawidłowo zdefiniuje trzy grupy liczb.

Istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy, ile jest liczb w co najmniej jednej z tych trzech grup.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający prawidłowo obliczy, ile jest liczb w każdej z tych trzech grup. Za prawidłowy wynik w dwóch grupach zdający otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i obliczy poprawnie liczbę wszystkich rozważanych liczb:

$$50+40+72=162.$$

Sposób III (liczba dziewiątek)

Najpierw policzymy liczby, w których jest tylko jedna cyfra 9. Tym razem zastosujemy metodę znaną z powyższego błędnego rozwiązania, jednak użycie tej metody będzie poprawne, gdyż jest tylko jedna cyfra 9. Możemy umieścić ją na jednym z trzech miejsc.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 36 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 32 liczby.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na drugim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku 72 liczby.

W sumie daje to $36+32+72=140$ liczb.

Teraz policzymy liczby, w których są dwie cyfry 9.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr.

W sumie daje to $4+8+9=21$ liczb.

Wreszcie mamy jedną liczbę z trzema dziewiątkami: 999.

Mamy więc $140+21+1=162$ liczby.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką lub obliczenie, że istnieje 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Każde z tych obliczeń wymaga rozpatrzenia trzech przypadków w zależności od położenia dziewiątek. Zdający otrzymuje **1 punkt**, jeśli prawidłowo rozpatrzy dwa z tych trzech przypadków i na tym poprzestanie lub popełni błąd w trzecim obliczeniu lub obliczeniu sumy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Obliczenie, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką i istnieje 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Jeśli zdający poprawnie wykona jedno z tych obliczeń, a w drugim popełni błąd taki jak opisany w poprzedniej kategorii, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Podanie pełnej odpowiedzi. Jeśli zdający poprawnie obliczy, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką lub 21 liczb z dwiema dziewiątkami, drugie z tych obliczeń doprowadzi do końca z błędem w jednym z trzech przypadków, następnie zauważy, że istnieje dokładnie jedna liczba z trzema dziewiątkami i poprawnie doda otrzymane liczby — otrzymując w efekcie wynik błędny — otrzymuje **4 punkty**.

Sposób IV (uzupełnianie)

Najpierw policzymy wszystkie liczby trzycyfrowe nieparzyste. Wszystkich liczb trzycyfrowych jest 900; co druga jest nieparzysta. Istnieje zatem 450 liczb trzycyfrowych nieparzystych. Możemy również rozumować następująco: na pierwszym miejscu można umieścić jedną z dziewięciu cyfr, na drugim jedną z dziesięciu cyfr, a na trzecim jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Łącznie mamy zatem $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ liczb. Teraz policzymy wszystkie liczby nieparzyste, w których nie występuje cyfra 9. Tym razem na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8), na drugim jedną z dziewięciu cyfr (od 0 do 8), a na trzecim jedną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7; łącznie mamy zatem $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$ liczb. Liczby w zadaniu to oczywiście liczby **należące** do pierwszej grupy (wszystkie liczby nieparzyste) i **nienależące** do drugiej grupy (w której są liczby nieparzyste **bez** dziewiątki). Stąd wynika, że liczb w zadaniu jest $450 - 288 = 162$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Postęp niewielki .... 1 pkt

Obliczenie liczby liczb trzycyfrowych: 900.

Istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie liczby nieparzystych liczb trzycyfrowych: 450. Jeśli zdający oblicza tę liczbę metodą rozmieszczania cyfr i popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli zdający stwierdzi, że istnieje 899 liczb trzycyfrowych i jako liczbę nieparzystych liczb trzycyfrowych poda liczbę 449 lub 450, to otrzymuje **1 punkt**.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Obliczenie liczby nieparzystych liczb trzycyfrowych niezawierających cyfry 9: jest 288 liczb. Jeżeli zdający obliczy poprawnie liczbę nieparzystych liczb trzycyfrowych niezawierających cyfry 9, ale popełni błąd opisany w kategorii „istotny postęp"", to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający otrzyma prawidłowy wynik (162 liczby) nie popełniając przy tym błędu (np. opisanego w kategorii „istotny postęp"). W przypadku, gdy popełni taki błąd, otrzymuje **4 punkty**.

Sposób V(zasada włączeń i wyłączeń)

Niektórzy uczniowie mogą zastosować w rozwiązaniu zasadę włączeń i wyłączeń, choć nie ma jej w podstawie programowej – mogli ją na przykład odkryć samodzielnie, jako intuicyjnie niemal oczywistą regułę.

Niech A będzie zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na pierwszym miejscu, B zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na drugim miejscu i wreszcie C zbiorem nieparzystych z dziewiątką na trzecim miejscu. Zbiorem liczb, które nas interesują, jest oczywiście zbiór $A \cup B \cup C$. Nietrudno teraz zauważyć, że:

$$|A| = 50,\ |B| = 45,\ |C| = 90$$

$$|A \cap B| = 5,\ |A \cap C| = 10,\ |B \cap C| = 9$$

$$|A \cap B \cap C| = 1$$

Z zasady włączeń i wyłączeń dostajemy

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 50 + 45 + 90 - 5 - 10 - 9 + 1 = 162.$$

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Postęp niewielki .... 1 pkt

Zdający zdefiniuje zbiory A, B i C i zauważy, że ma obliczyć $|A \cup B \cup C|$.

Postęp większy .... 2 pkt

Zdający obliczy $|A|$, $|B|$ i $|C|$.

Istotny postęp .... 3 pkt

Zdający obliczy $|A \cap B|$, $|B \cap C|$, $|A \cap C|$ i $|A \cap B \cap C|$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i podstawi do niego prawidłowe dane. Jeśli zdający zdefiniuje zbiory A, B i C, poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i poprawnie obliczy co najmniej $|A|$, $|B|$ i $|C|$ oraz popełni błędy w pozostałych obliczeniach, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Uwaga

Jeśli zdający tylko zdefiniuje zbiory A, B i C oraz poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń, to otrzymuje **2 punkty**.

Sposób VI (wypisywanie liczb w kolejności rosnącej)

Ten sposób rozwiązania może naprowadzić zdającego na stosunkowo proste rozwiązanie. Oczywiście wypisywanie wszystkich liczb spełniających warunki zadania nie może być dokonywane bez zastanowienia. Nie chodzi zatem o wypisanie w kolejności rosnącej wszystkich liczb trzycyfrowych (jest ich 900), wykreśleniu liczb parzystych oraz liczb, w których nie występuje dziewiątka i zliczeniu liczb niewykreślonych. Jeśli zdający nie popełni błędu, powinien otrzymać 162 liczby. Oczywiście takie rozwiązanie, wykonane bezbłędnie, powinno być ocenione na 5 punktów.

Zdający może również wypisywać w kolejności rosnącej tylko właściwe liczby. Oto poprawny wynik:

109	119	129	139	149	159	169	179	189
191	193	195	197	199				
209	219	229	139	249	259	269	279	289
291	293	295	297	299				
309	319	329	339	349	359	369	379	389
391	393	395	397	399				
409	419	429	439	449	459	469	479	489
491	493	495	497	499				
509	519	529	539	549	559	569	579	589
591	593	595	597	599				
609	619	629	639	649	659	669	679	689
691	693	695	697	699				
709	719	729	739	749	759	769	779	789
791	793	795	797	799				
809	819	829	839	849	859	869	879	889
891	893	895	897	899				
901	903	905	907	909				
911	913	915	917	919				
921	923	925	927	929				
931	933	935	937	939				
941	943	945	947	949				
951	953	955	957	959				
961	963	965	967	969				
971	973	975	977	979				
981	983	985	987	989				
991	993	995	997	999				

W pierwszych 16 wierszach mamy ośmiokrotnie wiersz z 9 liczbami i wiersz z 5 liczbami. W następnych 10 wierszach mamy po 5 liczb. Łącznie zatem wypisano

$$8\cdot(9+5)+10\cdot 5=162$$

liczby.

W trakcie wypisywania możemy zauważyć regułę i ją opisać: najpierw występują liczby zaczynające się od cyfry różnej od 9 (mamy tu 8 możliwości). Dla każdej takiej pierwszej cyfry c mamy 9 liczb postaci

$$c09,\quad c19,\quad c29,\quad c39,\quad c49,\quad c59,\quad c69,\quad c79,\quad c89,$$

po których przychodzi 5 liczb postaci

$$c91,\quad c93,\quad c95,\quad c97,\quad c99.$$

Dla każdej cyfry $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ wypiszemy w ten sposób 14 liczb. To łącznie daje $8 \cdot 14 = 112$ liczb. Następnie wypisujemy liczby zaczynające się od dziewiątki. Warunek mówiący, że w zapisie liczby występuje dziewiątka, jest teraz spełniony; na drugim miejscu może zatem wystąpić dowolna z 10 cyfr, a na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 2, 5, 7, 9. To daje łącznie 50 liczb, a więc ostatecznie dostajemy 162 liczby.

Komentarz

Zdający mogą próbować wypisywać liczby w różnej kolejności, stosując różne strategie. W przypadku, gdy zdający wyłącznie wypisuje liczby i podaje ostateczną odpowiedź, uznajemy tylko rozwiązania całkowicie bezbłędne: odpowiedź 162 popartą poprawną listą liczb. Za takie rozwiązanie zdający powinien otrzymać **5 punktów**. Za rozwiązania polegające na wypisywaniu liczb, niezawierające wyjaśnień i prowadzące do błędnej odpowiedzi zdający powinien otrzymać **0 punktów**. Jeśli zdający poda odpowiedź poprawną (162 liczby) bez jakiegokolwiek uzasadnienia, to za takie rozwiązanie można otrzymać co najwyżej **1 punkt**. Jeśli natomiast poprawna odpowiedź jest poparta nieprawidłową listą liczb, to zdający otrzymuje **0 punktów**.

Metoda polegająca na wypisywaniu liczb może – jak widzieliśmy wyżej – prowadzić do trafnych uogólnień. Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na dokonaniu dwóch obserwacji: dla każdej cyfry różnej od 0 i 9 mamy 14 interesujących nas liczb zaczynających się tą cyfrą oraz dla cyfry 9 mamy 50 liczb zaczynających się tą cyfrą.

Schemat oceniania VI sposobu rozwiązania

Jeśli zdający opisze regułę prowadzącą do wypisania poprawnej listy, to przyznajemy punkty według następującego schematu:

Istotny postęp .... 2 pkt

- Zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest różna od 9, to mamy 14 liczb

lub

- zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest dziewiątką, to mamy 50 liczb.

Uznajemy w tej kategorii rozwiązania, w których zdający wypisze w wyraźnie wyodrębnionej grupie 14 liczb zaczynających się np. od jedynki i wskaże (np. za pomocą trzech kropek), że ta sama reguła obowiązuje dla pozostałych pierwszych cyfr różnych od dziewiątki. Uznajemy także rozwiązania, w których zdający wyłącznie obliczy, że jest 50 liczb nieparzystych zaczynających się od dziewiątki.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający zauważy obie reguły opisane w poprzedniej kategorii.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i ponadto poprawnie obliczy liczbę wszystkich rozważanych liczb: $8\cdot 14+50=162$.

Uwaga

W tej metodzie rozwiązania zdający może popełnić wiele błędów. Na przykład, może wypisując liczby zaczynające się cyfrą 1 nie zauważyć, że liczba 199 pojawia się dwukrotnie: raz w ciągu 10 liczb

109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199

i drugi raz w ciągu liczb

191, 193, 195, 197, 199.

Jeśli zdający wyłącznie zauważy, że istnieje 15 liczb zaczynających się od cyfry różnej od 9, powinien otrzymać 1 punkt. Inny błąd może polegać na złym obliczeniu, ile jest liczb zaczynających się od dziewiątki. Zdający może na przykład zapomnieć, że rozważamy wyłącznie liczby nieparzyste i przyjmie, że istnieje 100 takich liczb. Za taką obserwację też powinien otrzymać 1 punkt. Te błędy mogą prowadzić do następujących błędnych odpowiedzi:

$$8\cdot 15+50=170$$

oraz

$$8\cdot 14+100=192.$$

Za doprowadzenie rozwiązania do końca z jednym z tych dwóch błędów zdający powinien otrzymać 4 punkty. Oba opisane błędy prowadzą do odpowiedzi

$$8\cdot 15+100=220,$$

za którą zdający powinien otrzymać 3 punkty.

Zadanie III (0–3)

Wykaż, że jeżeli $x>0$, to $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$.

I sposób rozwiązania (pierwsza pochodna)

Definiujemy funkcję f określoną wzorem $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ dla $x\in(0,+\infty)$.

Funkcja f jest różniczkowalna, obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

Ponieważ $x^2+2x+4>0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to

$f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$,

$f'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(0,2)$,

$f'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(2,+\infty)$.

Wynika stąd, że funkcja f jest malejąca w przedziale $\left(0,2\right\rangle$ i jest rosnąca w przedziale $\left\langle 2,+\infty\right)$, czyli dla $x=2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczamy $f(2)=4+\frac{16}{2}=12$, stąd wynika, że $f(x)\geq 12$ co należało udowodnić.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Określenie funkcji $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ dla $x\in(0,+\infty)$ i obliczenie jej pochodnej

$$f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie miejsca zerowego pochodnej i wyznaczenie przedziałów, w których pochodna ma „stały znak”:

$f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$,

$f'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(0,2)$,

$f'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(2,+\infty)$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Stwierdzenie, że funkcja f jest malejąca w przedziale $\left(0,2\right\rangle$ i jest rosnąca w przedziale $\left\langle 2,+\infty\right)$, czyli dla $x=2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczenie $f(2)=12$ i zapisanie wniosku: $f(x)\geq 12$, co należało udowodnić.

Uwagi

1. Zdający po obliczeniu, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$, może uzasadnić tezę korzystając z drugiej pochodnej funkcji f.
2. Jeżeli zdający obliczy, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$ i stąd już wywnioskuje, że: $f(x)\geq f(2)=12$, to za rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

Komentarz

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który nie zmieni miejsc zerowych pochodnej i dalej doprowadzi rozwiązanie do końca, to może otrzymać za całe zadanie maksymalnie **2 punkty**.

Przykłady tego typu błędów:

$$f'\left(x\right)=\frac{2x^3-16}{x},$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2\left(x-2\right)\left(x^2+x+4\right)}{x^2},$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2\left(x-2\right)\left(x^2+2x+2\right)}{x^2}.$$

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który zmienia miejsca zerowe pochodnej, to otrzymuje za zadanie **0 punktów**.

II sposób rozwiązania (przekształcenia równoważne)

Zapisujemy nierówność $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$ i przekształcamy ją równoważnie:

$$x^2-4x+4+\frac{16}{x}+4x-16\geq 0,$$

$$x^2-4x+4+\frac{4}{x}\left(x^2-4x+4\right)\geq 0,$$

$$\left(x-2\right)^2+\frac{4}{x}\left(x-2\right)^2\geq 0,$$

$$\left(x-2\right)^2\left(1+\frac{4}{x}\right)\geq 0.$$

Jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, jako iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego, co należało udowodnić.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zapisanie nierówności w postaci $x^2-4x+4+\frac{16}{x}+4x-16\geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci $\left(x-2\right)^2+\frac{4}{x}\left(x-2\right)^2\geq 0$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

- Zapisanie nierówności w postaci $\left(x-2\right)^2\left(1+\frac{4}{x}\right)\geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego jest nieujemny, co kończy dowód

albo

- zapisanie nierówności w postaci $\left(x-2\right)^2+\frac{4}{x}\left(x-2\right)^2\geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x>0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, co kończy dowód.

III sposób rozwiązania (funkcja wymierna)

Zapisujemy nierówność $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$ w postaci równoważnej $\frac{x^3-12x+16}{x}\geq 0$.

Przy założeniu $x>0$, nierówność ta jest równoważna nierówności $x^3-12x+16\geq 0$ dla $x>0$

Określamy wielomian $W(x)=x^3-12x+16$.

Stwierdzamy, że jednym z miejsc zerowych wielomianu W jest liczba 2. Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $x-2$ otrzymujemy iloraz x^2+2x-8, który zapisujemy w postaci iloczynowej $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$.

Stąd $W(x)=x^3-12x+16=(x-2)\left(x^2+2x-8\right)=(x-2)^2(x+4)$.

Stwierdzamy, że jeżeli $x>0$, to $W(x)\geq 0$ jako iloczyn czynników nieujemnych, co kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Stwierdzenie, że przy założeniu $x>0$, nierówność jest równoważna nierówności $x^3-12x+16\geq 0$ dla $x>0$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Zapisanie wielomianu W w postaci iloczynowej

$$W(x)=x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4).$$

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Uzasadnienie, że jeżeli $x>0$, to $W(x)\geq 0$, co kończy dowód.

IV sposób rozwiązania (zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej)

Niektórzy uczniowie mogą odwołać się do tej nierówności, choć nie ma jej w podstawie programowej i, jak widzieliśmy, rozwiązanie zadania nie wymaga jej znajomości. Lewą stronę nierówności zapisujemy w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

Przy założeniu $x>0$, korzystamy z nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

$$\text{jeżeli } a>0,\ b>0,\ c>0, \text{ to } \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}, \text{ czyli } a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Podstawiając

$$a=x^2, \quad b=\frac{8}{x}, \quad c=\frac{8}{x}$$

otrzymujemy

$$x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=3\sqrt[3]{64}=12\,.$$

Stąd wynika, że $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$, co kończy dowód.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie lewej strony nierówności w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

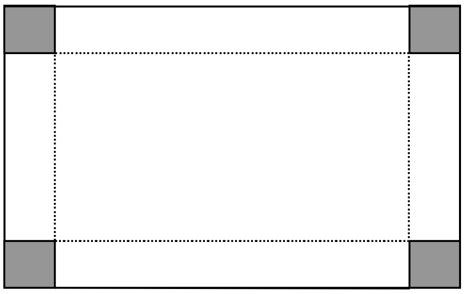
jeżeli $a>0$, $b>0$, $c>0$, to $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$, dla $a=x^2$, $b=\frac{8}{x}$, $c=\frac{8}{x}$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zapisanie, że dla $x>0$, po zastosowaniu nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej otrzymujemy $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=12$, co kończy dowód.

Zadanie IV (0–7)

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (na rysunku zaznaczone kolorem szarym). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę objętość.



Rozwiązanie

Oznaczmy literą x długość boku kwadratowych naroży. Podstawa pudełka ma wymiary

$$(80-2x)\times(50-2x).$$

Wysokość pudełka jest równa x. Zatem objętość wyraża się wzorem

$$V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x,$$

czyli

$$V=(4000-160x-100x+4x^2)\cdot x=4x^3-260x^2+4000x=4\left(x^3-65x^2+1000x\right)$$

dla $0<x<25$.

Rozważmy funkcję $f\left(x\right)=x^3-65x^2+1000x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Obliczamy pochodną tej funkcji: $f'\left(x\right)=3x^2-130x+1000$.

Następnie znajdujemy miejsca zerowe tej pochodnej:

$$\Delta=130^2-12\cdot1000=16900-12000=4900,$$

$$x_1=\frac{130-70}{6}=10,\quad x_2=\frac{130+70}{6}=33\frac{1}{3}.$$

Ponadto:

$f'(x)>0$ w każdym z przedziałów $\left(-\infty,10\right)$ oraz $\left(\frac{100}{3},+\infty\right)$,

$f'(x)<0$ w przedziale $\left(10,\frac{100}{3}\right)$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty,10\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{100}{3},\infty\right)$ i malejąca w przedziale $\left\langle 10,\frac{100}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $V(x)=4f(x)$ dla $x\in(0,25)$, więc w przedziale $(0,25)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=10$ funkcja V przyjmuje wartość największą. Szukana objętość jest zatem równa $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18000\ \text{cm}^2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wybór zmiennej i wyrażenie za pomocą tej zmiennej wielkości, które będą potrzebne do zdefiniowania funkcji. Oznaczenie literą x długości boku kwadratowych naroży, zapisanie wymiarów podstawy pudełka $(80-2x)\times(50-2x)$,
- zdefiniowanie funkcji jednej zmiennej, zapisanie objętości jako funkcji zmiennej wysokości pudełka x: $V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x$,
- określenie dziedziny funkcji V: $0<x<25$.

Zdający otrzymuje **2 punkty** za poprawne zdefiniowanie funkcji zmiennej x opisującej objętość prostopadłościanu. Ponadto zdający otrzymuje **1 punkt** za poprawne określenie dziedziny wynikającej z treści zadania, a nie z wyznaczonego wzoru funkcji.

b) Drugi etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=3x^2-130x+1000$,
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1=10,\ x_2=33\frac{1}{3}$,
- uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja posiada wartość największą w punkcie $x=10$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt,** o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap **(1 pkt)**.

Obliczenie największej objętości: $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18000\ \text{cm}^2$.

Komentarz

Zdający rozwiązując zadanie może nie doprowadzić rozumowania do końca lub popełnić różnego rodzaju błędy np.:

1. Błędne określenie dziedziny funkcji V np. zapisanie $x > 0$ lub $x < 50$. Jeżeli zdający nie poda dziedziny funkcji lub poda ją błędnie, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **6 punktów**.
2. Błędne zapisanie wzoru na objętość pudełka (np. błędne określenie wymiarów pudełka lub wzoru na objętość prostopadłościanu).
3. Niewłaściwe wyznaczenie pochodnej rozważanej funkcji.
4. Nieprawidłowo obliczone miejsca zerowe pochodnej.
5. Błędne określenie monotoniczności funkcji oraz jej ekstremów.
6. Brak uzasadnienia, błędne lub niepełne uzasadnienie, że funkcja V w punkcie $x = 10$ przyjmuje maksimum lokalne.
7. Nieobliczenie lub błędne obliczenie największej objętości pudełka.

Schemat oceniania pokazuje jak w poszczególnych sytuacjach ocenić rozwiązanie zadania.

6.4. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym dla absolwentów niesłyszących wraz z rozwiązaniami

Numeracja zadań w części 6.4. odpowiada numeracji zadań w części 4. Jeżeli zadanie nie zostało przedstawione poniżej, oznacza to, że wersja dla niesłyszących nie różni się niczym od wersji przedstawionej w części 4.

Zadanie 16. (0–1)

Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg są oparte na tym samym łuku. Suma miar tych kątów jest równa 180°. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. 60° B. 90° C. 120° D. 135°

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

7.1. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Rozwiązanie C

Zadanie 21. (0–1)

W kinie jest 5 wolnych miejsc. Liczba wszystkich sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch miejscach, jest równa

A. 25 B. 20 C. 15 D. 12

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Rozwiązanie B

Zadanie 23. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \le 0$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

3.5. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego lub rozkładamy trójmian na czynniki $x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$. Trójmian kwadratowy $y = x^2 + 6x - 7$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. Ponieważ parabola o równaniu $y = x^2 + 6x - 7$ ma ramiona skierowane do góry, to leży ona poniżej osi Ox między swoimi miejscami zerowymi. Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział domknięty $\langle -7, 1 \rangle$.

Zadanie 24. (0–2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.11. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Rozwiązanie

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 1$. Mamy $x_w = -\dfrac{b}{2a} = 3$, $y_w = -\dfrac{\Delta}{4a} = -8$. Ponieważ parabola ma ramiona skierowane do góry, to w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ dana funkcja maleje. Dlatego maleje także na zawartym w nim przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Dlatego najmniejszą wartość funkcja ma w prawym końcu, czyli dla $x = 1$. Tą wartością jest $y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -4$.

Zadanie 26. (0–2)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 11$ i przechodzącej przez punkt $P = (1, 2)$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

8.3. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Rozwiązanie

Wszystkie proste równoległe do danej prostej mają taki sam współczynnik kierunkowy. Dlatego szukamy prostej o równaniu $y = 2x + b$. Ponieważ szukana prosta przechodzi przez punkt $P = (1, 2)$, otrzymujemy $2 = 2 \cdot 1 + b$, więc $b = 0$. Dlatego prosta ta ma równanie $y = 2x$.

Zadanie 27. (0–2)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową *CD* trójkąta *ABC*, którego wierzchołkami są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (6, 1)$, $C = (7, 10)$.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

8.5.Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka.
8.1. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).

Rozwiązanie

Wiemy, że szukana prosta przechodzi przez punkt $C = (7, 10)$ oraz że przechodzi przez punkt *D*, który jest środkiem boku *AB*. Dlatego korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy $D = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+1}{2} \right) = (2, 0)$. Ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty otrzymujemy: $(y - 10)(2 - 7) - (0 - 10)(x - 7) = 0$, a stąd $-5y + 10x - 20 = 0$, czyli $-y + 2x - 4 = 0$.

Zadanie 28. (0–2)

W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

6.1.Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Rozwiązanie

Niech α będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 2, a β niech będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 4. Zauważmy, że $\sin\alpha = \cos\beta$ oraz $\cos\alpha = \sin\beta$, więc mamy $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\beta\cdot\cos\beta$, czyli szukana wartość nie zależy od wyboru kąta.

Przeciwprostokątna w danym trójkącie ma długość $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Zadanie 29. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3+2\mathrm{tg}^2\alpha$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

6.4. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *oraz* $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$.

Rozwiązanie

Mamy $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, więc $\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{15}$.

Dlatego $3+2\,\mathrm{tg}^2\alpha = 3+\frac{2}{15}=\frac{47}{15}$.

Zadanie 30. (0–2)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

5.1.Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Rozwiązanie

Szukamy liczb naturalnych $n \geq 1$ spełniających nierówność $n^2 - 2n - 24 < 0$.
Zapisujemy tę nierówność w postaci $n^2 - 2n + 1 - 25 < 0$, $(n-1)^2 - 5^2 < 0$, więc $(n-1-5)(n-1+5) < 0$, $(n-6)(n+4) < 0$. Ponieważ $n+4 > 0$, otrzymujemy $n < 6$.
Dlatego liczba n może mieć jedną z pięciu wartości: 1, 2, 3, 4, 5, czyli ciąg ma pięć wyrazów ujemnych.

Zadanie 32. (0–2)

Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Ponieważ dokładnie co piąta liczba naturalna daje z dzielenia przez 5 resztę 2, to różnica danego ciągu arytmetycznego równa się 5. Dlatego $12 = a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 10$, więc $a_1 = 2$.
Dlatego $a_{15} = a_1 + 14r = 2 + 14 \cdot 5 = 72$.

Zadanie 33. (0–2)

Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt o bokach a i b.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

5.4. (gimnazjum) Zdający stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Rozwiązanie

Otrzymany prostokąt ma boki długości $0{,}9a$ oraz $1{,}2b$. Z porównania obwodów tych prostokątów otrzymujemy związek $2\cdot 0{,}9a + 2\cdot 1{,}2b = 2a + 2b$, skąd $0{,}4b = 0{,}2a$. Dlatego $\frac{a}{b} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2$.

Zadanie 34. (0–2)

Udowodnij, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Wymagania szczegółowe

2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ *oraz* $a^2 - b^2$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnych liczb x, y mamy $(x-y)^2 \geq 0$, więc $x^2 + y^2 \geq 2xy$, co kończy dowód.

Zadanie 35. (0–2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są pary liczb całkowitych (a,b), gdzie $1 \le a,b \le 6$. Mamy 36 takich par. Zdarzenia elementarne sprzyjające to pary $(1,5)$ oraz $(5,1)$. Dlatego prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5 jest równe $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Zadanie 36. (0–4)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4, a_6 = 19$. Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $(0, 200)$?

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie

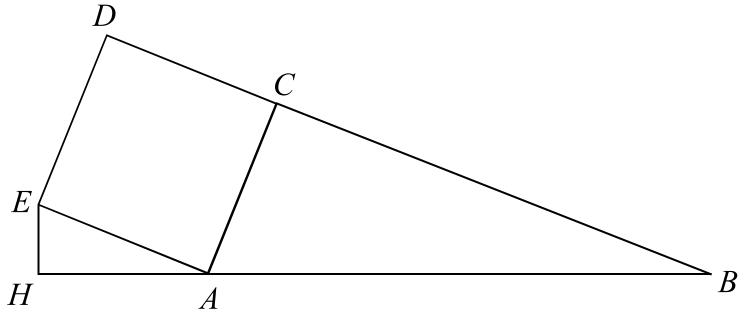
Mamy $4 = a_1 + 2r$, $19 = a_1 + 5r$. Więc $3r = 15$, $r = 5$ oraz $a_1 = -6$. Pytamy, dla jakich n mamy $0 < a_n < 200$, czyli $0 < -6 + (n-1) \cdot 5 < 200$.

Więc $6 < 5(n-1) < 206$, $\frac{6}{5} < n-1 < \frac{206}{5}$, $\frac{11}{5} < n < \frac{211}{5}$.

Pierwszą nierówność spełniają liczby $n \ge 3$, a drugą nierówność liczby $n \le 42$. Dlatego jest 40 liczb naturalnych spełniających te dwa warunki i 40 wyrazów ciągu leży w przedziale $(0,200)$.

Zadanie 37. (0–4)

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego *ABC*, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| = 5$, $|BC| = 12$ zbudowano kwadrat *ACDE* (zobacz rysunek). Punkt *H* leży na prostej *AB* i kąt $|\sphericalangle EHA| = 90°$. Oblicz pole trójkąta *HAE*.



Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

7.3. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąt prostokątny *EAH* jest podobny do trójkąta *ABC,* bo kąty *EAH* oraz *ABC* są przystające, jako kąty o ramionach równoległych. Oznaczymy przez *s* skalę podobieństwa trójkąta *EAH* do trójkąta *ABC.* Wtedy

$$P_{EAH} = s^2 P_{ABC} = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30s^2.$$

Następnie obliczamy *s*.

Mamy

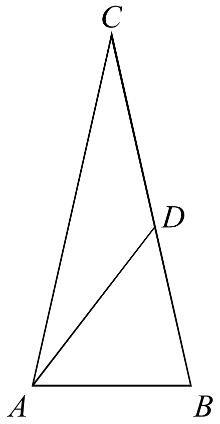
$$s = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AC|}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{5}{13}.$$

Więc

$$P_{\Delta EAH} = 30 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{750}{169}.$$

Zadanie 38. (0–4)

Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ADC| = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$.



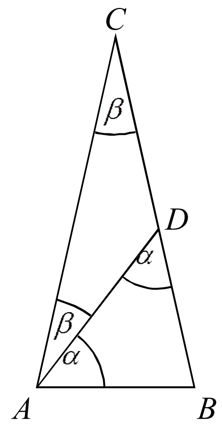
Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Wymagania szczegółowe

10.17 (gimnazjum) Zdający rozpoznaje figury, które mają oś symetrii i figury, które mają środek symetrii. Wskazuje oś symetrii i środek symetrii figury.

Rozwiązanie I



Niech $\alpha = |\sphericalangle BAD|$ i $\beta = |\sphericalangle ACD|$.
Trójkąty ABD, ACD i ABC są równoramienne, więc
$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$, $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = \beta$
oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha + \beta$.
Suma miar kątów trójkąta ACD jest równa $180°$, więc
$|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\beta$.
Wiadomo również, że $|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ADB|$,
czyli $180° - 2\beta = 180° - \alpha$. Stąd $\alpha = 2\beta$.
Suma miar kątów trójkąta ABC jest równa $180°$, więc $2(\alpha + \beta) + \beta = 180°$, czyli $2(2\beta + \beta) + \beta = 180°$. Stąd $7\beta = 180°$.
Więc $|\sphericalangle ADC| = 180° - 2\beta = 7\beta - 2\beta = 5\beta = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$. To kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy kąty α i β jak w poprzednim rozwiązaniu.

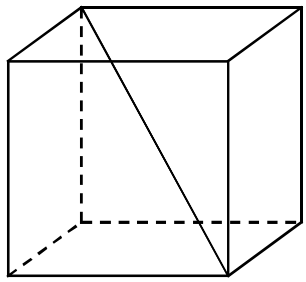
Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC, więc $\alpha = 2\beta$.

Również kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD, więc

$|\sphericalangle ADC| = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta = 4\beta + \beta = 5\beta = 5|\sphericalangle ACD|$, co kończy dowód.

Zadanie 39. (0–2)

Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.



Wymagania ogólne

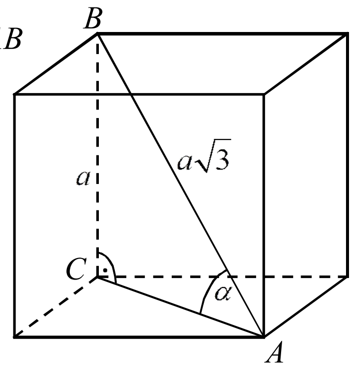
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

9.2. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów.

Rozwiązanie

Mamy trójkąt prostokątny ABC, utworzony przez przekątną AB sześcianu, przekątną AC podstawy sześcianu oraz krawędź BC, jak na rysunku. Kąt ostry α tego trójkąta jest kątem między przekątną sześcianu i płaszczyzną jego podstawy. Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$, więc sinus kąta α jest równy



$$\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie 40. (0–4)

W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = 0,2$. Podaj objętość tego graniastosłupa w zależności od d.

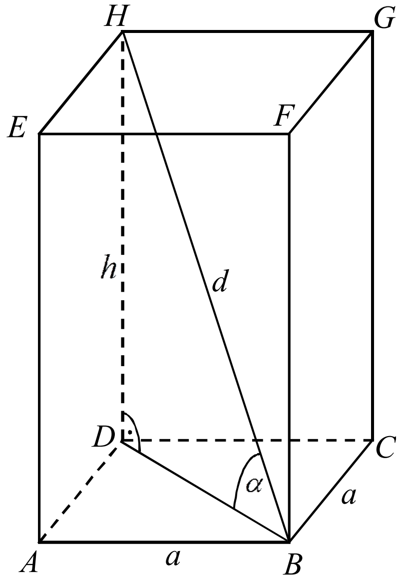
Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Rozwiązanie I



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Trójkąt BDH jest prostokątny, więc

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}, \text{ czyli } \frac{1}{5} = \frac{h}{d}. \text{ Stąd } h = \frac{1}{5}d.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDH otrzymujemy

$$|BD|^2 = d^2 - h^2 = d^2 - \left(\frac{1}{5}d\right)^2 = \frac{24}{25}d^2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest więc równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|BD|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}d^2 = \frac{12}{25}d^2.$$

Dlatego objętość tego graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABCD}\cdot h = \frac{12}{25}d^2\cdot\frac{1}{5}d = \frac{12}{125}d^3.$$

Rozwiązanie II

Przyjmijmy oznaczenia jak w rozwiązaniu I.

Trójkąt BDH jest prostokątny, więc $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, czyli $h = d\sin\alpha$. Stąd $h = 0,2\,d$.

W trójkącie BDH mamy również $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$, czyli $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-(0,2)^2} = \sqrt{0,96}\,d$.

Stąd $V = a^2h = \frac{1}{2}\cdot 0,96d^2\cdot 0,2d = 0,096d^3$.

Zadanie 41. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w zapisie dziesiętnym tych liczb jest jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Rozwiązanie

Mamy 5 cyfr parzystych: 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Musimy jednak pamiętać, że 0 nie może być pierwszą cyfrą zapisu dziesiętnego liczby. Dlatego mamy dwa przypadki: a) gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta oraz b) gdy pierwsza cyfra jest parzysta.
W przypadku a) pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów; każda pozostała cyfra musi być parzysta i każdą z nich też możemy wybrać na 5 sposobów. Dlatego w przypadku a) mamy 5^4 możliwości.
W przypadku b) cyfrę parzystą, stojącą na pierwszym miejscu, możemy wybrać na 4 sposoby. Na pozostałych miejscach mamy ustawić jedną cyfrę nieparzystą oraz dwie cyfry parzyste. Miejsce dla cyfry nieparzystej możemy wybrać na 3 sposoby; na pozostałych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Cyfrę na każdym z tych trzech miejsc można wybrać na 5 sposobów. Dlatego w przypadku b) mamy $4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 12 \cdot 5^3$ możliwości.
W obu przypadkach łącznie otrzymujemy $5^4 + 12 \cdot 5^3 = \left(5+12\right) \cdot 5^3 = 17 \cdot 125 = 2125$ liczb spełniających warunki zadania.

Zadanie 42. (0–4)

Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez oddawania losów do pojemnika. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy jeden lub dwa losy wygrywające. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie I (model klasyczny)

Oznaczmy przez w_1, w_2 losy wygrywające, a przez p_1, p_2, p_3 losy puste. Wszystkie wyniki losowania dwóch losów bez ich oddawania możemy przedstawić w tabeli: wynik pierwszego losowania wyznacza wiersz, a wynik drugiego losowania – kolumnę, w przecięciu których leży pole, odpowiadające tej parze losowań. Pola położone na przekątnej odrzucamy, gdyż odpowiadałyby one wylosowaniu dwa razy tego samego losu, a to jest niemożliwe, gdyż losujemy bez oddawania losu.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch losów, wśród których jeden lub dwa są wygrywające. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A zaznaczamy w tabeli krzyżykiem (x).

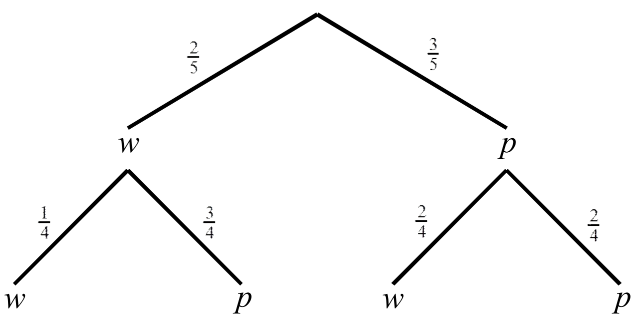
	w_1	w_2	p_1	p_2	p_3
w_1		x	x	x	x
w_2	x		x	x	x
p_1	x	x			
p_2	x	x			
p_3	x	x			

Mamy więc 20 wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 20$, oraz 14 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, czyli $|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

Rozwiązanie II (metoda drzewa)

Losowanie z pojemnika kolejno dwóch losów bez oddawania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie w oznacza wylosowanie losu wygrywającego, a p – losu pustego. Pogrubione gałęzie drzewa odpowiadają zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Na odcinkach drzewa zostały zapisane odpowiednie prawdopodobieństwa.



Więc prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2+6+6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

Zadanie 43. (0–3)

Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Wymagania szczegółowe

2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ *oraz* $a^2 - b^2$.

Rozwiązanie I

Dla dowodu przekształcimy w sposób równoważny tezę.

Ponieważ obie strony danej nierówności $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$ są dodatnie, możemy je podnieść do kwadratu. Otrzymujemy kolejno:

$$\left(\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}\right)^2<\left(2^{26}\right)^2$$

$$2^{50}+1+2\cdot\sqrt{2^{50}+1}\cdot\sqrt{2^{50}-1}+2^{50}-1<2^{52}$$

$$2\cdot 2^{50}+2\sqrt{\left(2^{50}-1\right)\left(2^{50}+1\right)}<2^{52}$$

$$2\sqrt{2^{100}-1}<2^{52}-2^{51}$$

$$\sqrt{2^{100}-1}<2^{50}.$$

Obie strony tej nierówności są także dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy

$$2^{100}-1<2^{100}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a więc dana w zadaniu nierówność jest również prawdziwa, co kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy $a=\sqrt{2^{50}+1}$, $b=\sqrt{2^{50}-1}$. Zauważmy, że dla dowolnych liczb *a, b*, takich, że $a \neq b$, mamy $(a-b)^2>0$, skąd $a^2+b^2>2ab$. Więc

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab<a^2+b^2+a^2+b^2=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(2^{50}+1+2^{50}-1\right)=2^{52}$.

Stąd $a+b<\sqrt{2^{52}}=2^{26}$, co kończy dowód.

Zadanie 44. (0–5)

W roku 2015 na uroczystości urodzinowej Marka ktoś spytał go, ile ma lat. Marek odpowiedział: jeżeli swój wiek sprzed 27 lat pomnożę przez wiek, który będę miał za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia. Oblicz, ile lat ma Marek.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

3.4. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie

Oznaczamy przez x obecny wiek Marka (w latach). Wówczas wiek Marka sprzed 27 lat jest równy $x-27$, wiek jaki będzie miał za 15 lat jest równy $x+15$, a rok jego urodzenia to $2015-x$.

Mamy więc równanie $(x-27)(x+15)=2015-x$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy $x^2-11x-2420=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby $x=55$, $x=-44$.

Stąd wiemy, że Marek w roku 2015 ma 55 lat.

6.5. PRZYKŁADOWE ZADANIA Z MATEMATYKI NA POZIOMIE ROZSZERZONYM DLA ABSOLWENTÓW NIESŁYSZĄCYCH WRAZ Z ROZWIĄZANIAMI

Numeracja zadań w części 6.5. odpowiada numeracji zadań w części 5. Jeżeli zadanie nie zostało przedstawione poniżej, oznacza to, że wersja dla niesłyszących nie różni się niczym od wersji przedstawionej w części 5.

Zadanie 11. (0–2)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $\left(a_n\right)$ o wyrazach dodatnich taki, że $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

5.3.R Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $a_1 = \frac{3}{4}$, a trzeci wyraz tego ciągu jest równy $a_3 = \frac{1}{3}$.

Ponieważ, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, stąd $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4}{9}$. Zatem $q = -\frac{2}{3}$ lub $q = \frac{2}{3}$. Wyrazy ciągu są dodatnie, więc $q = \frac{2}{3}$. Ponieważ $|q| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1$, więc

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{4}.$$

Suma S wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $\left(a_n\right)$ o wyrazach dodatnich jest równa: $S = \frac{9}{4}$.

Zadanie 13. (0–3)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.

Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

11.3.R Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Rozwiązanie

Zapisujemy równanie prostej l w postaci kierunkowej $y=10x+9$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x)=12x^2-2$.

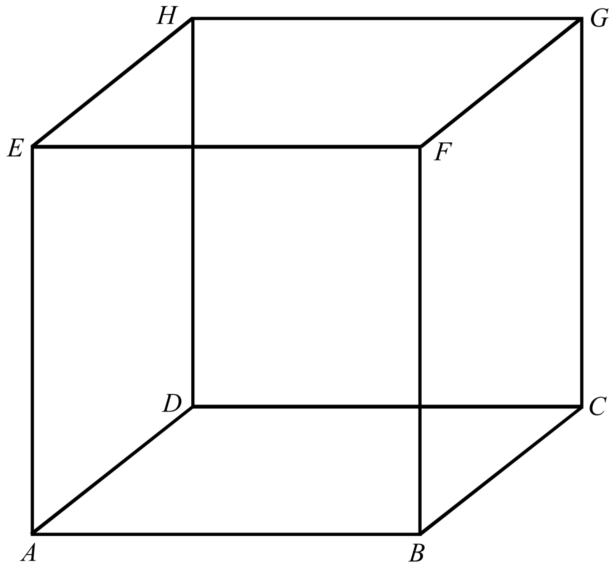
Zauważamy, że dla $x=-1$ oraz dla $x=1$ pochodna funkcji f jest równa 10 i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej l.

Obliczamy wartość funkcji f w punkcie $x=-1$: $f(-1)=-1$ oraz w punkcie $x=1$: $f(1)=3$.

Punkt o współrzędnych $(-1,-1)$ leży na prostej l, natomiast punkt o współrzędnych $(1,3)$ nie leży na tej prostej. Zatem prosta o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f, co kończy dowód.

Zadanie 28. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ poprowadzoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.



Wymaganie ogólne

IV. Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

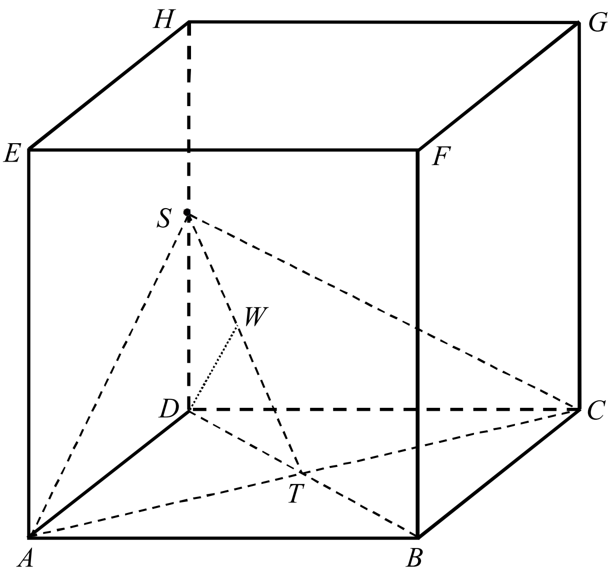
Wymagania szczegółowe

9.2. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Rozwiązanie

Łączymy punkty A i S, A i C oraz C i S (zobacz rysunek). Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy tego sześcianu.



Punkt S leży na krawędzi DH, więc $AS = CS$, a zatem trójkąt ACS, który jest podstawą ostrosłupa $ACSD$, jest trójkątem równoramiennym. Wynika stąd, że odcinek ST jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka ST obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego TSD:

$$|ST|^2 = |SD|^2 + |DT|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ czyli } |ST| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zauważamy, że odcinek DW jest wysokością trójkąta prostokątnego TDS poprowadzoną do przeciwprostokątnej TS. Długość odcinka DW obliczymy zapisując na dwa sposoby pole trójkąta TDS:

$$\frac{1}{2}\cdot|SD|\cdot|TD| = \frac{1}{2}\cdot|ST|\cdot|DW|,$$

$$|DW| = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego SWD wynika, że:

$$|SW| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Teraz zauważamy, że wysokość ST trójkąta równoramiennego ACS jest zawarta w osi symetrii tego trójkąta. Wynika stąd, że $AW = CW$. Długość odcinka AW obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ATW, w którym

$$|TW| = |ST| - |SW| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Otrzymujemy zatem

$$|AW|^2 = |AT|^2 + |TW|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{6},$$

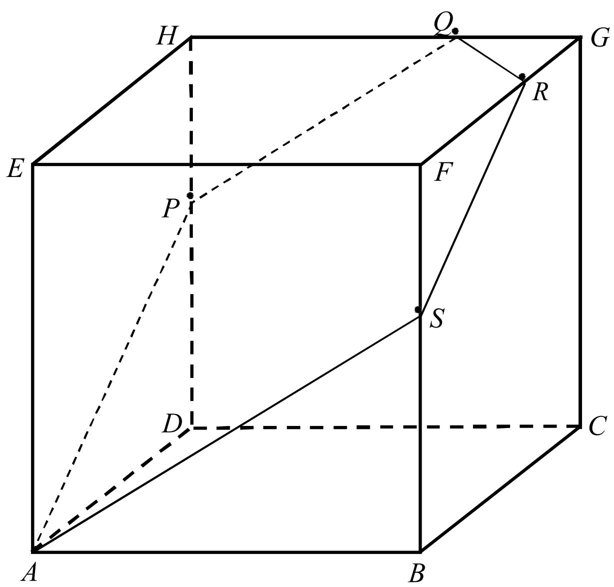
skąd

$$|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Podsumowując, szukane odcinki mają długości: $|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $|SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Zadanie 30. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędź DH w punkcie P, a krawędź BF w punkcie S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



Wymaganie ogólne

IV. Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

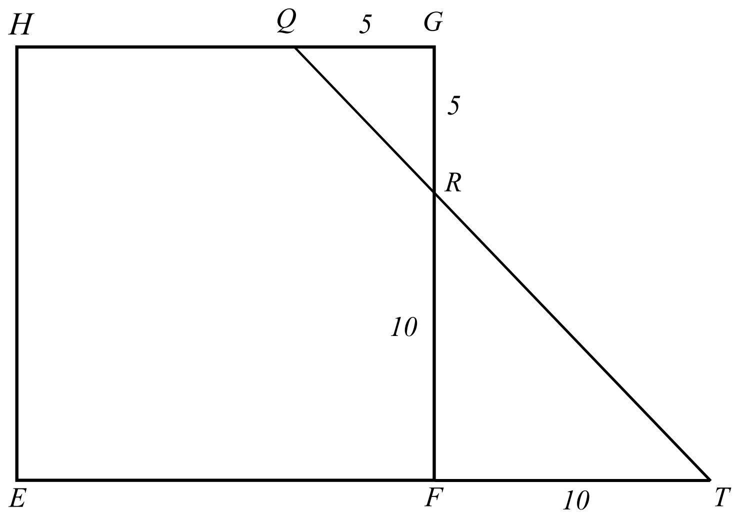
9.2.R Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

9.1. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), oblicza miary tych kątów.

7.4.R Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

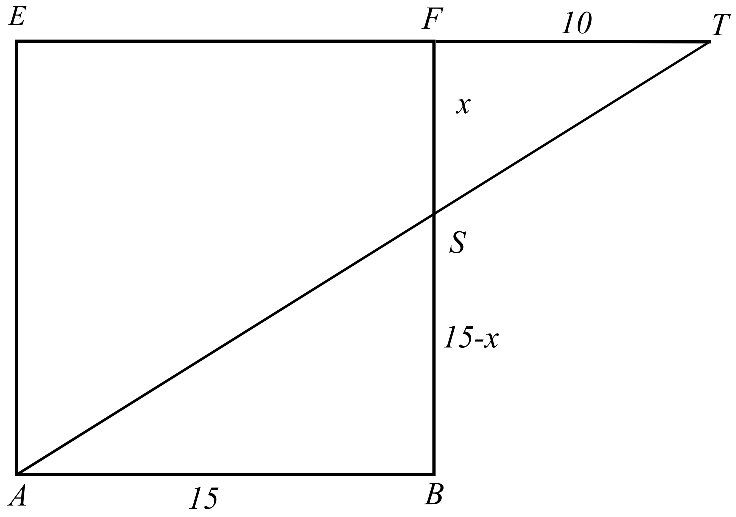
Rozwiązanie (I sposób)

Rozważamy kwadrat $EFGH$. Niech T oznacza punkt przecięcia przedłużeń odcinków QR i EF (zobacz rysunek).



Trójkąty prostokątne RFT i RGQ są podobne na mocy cechy *kkk*. Stąd wynika, że $|FT| = 10$.

Teraz rozważamy kwadrat $ABFE$ (zobacz rysunek).



Trójkąty prostokątne ABS i TFS są podobne na mocy cechy *kkk*. Możemy więc zapisać równanie

$$\frac{|SF|}{|FT|}=\frac{|BS|}{|AB|}, \text{ a zatem } \frac{x}{10}=\frac{15-x}{15}.$$

Rozwiązujemy to równanie

$$15x=150-10x,$$

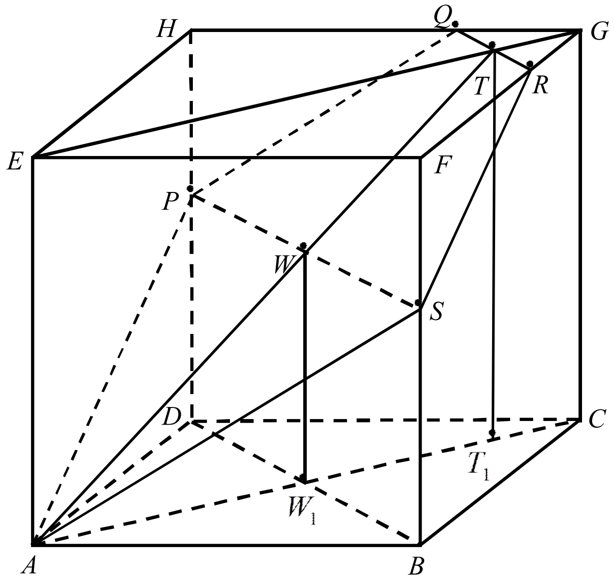
$$25x=150,$$

$$x=6.$$

Zatem długość szukanego odcinka BS jest równa 9. Ponieważ punkty B i D leżą symetrycznie względem płaszczyzny $ACGE$, więc $|DP|=|BS|=9$.

Rozwiązanie (II sposób)

Rysujemy przekątne AC, BD, EG oraz łączymy punkty P i S. Oznaczmy kolejno: W – środek odcinka PS, W_1 – punkt przecięcia przekątnych AC i BD, T – środek odcinka QR (zobacz rysunek). Niech ponadto T_1 będzie takim punktem przekątnej AC, że $GT = CT_1$.



Zauważamy, że $DP = BS$ co wynika, z symetrii względem płaszczyzny $ACGE$. Zatem czworokąt $BSPD$ jest prostokątem. Stąd wynika, że prosta przechodząca przez środki boków tego prostokąta – punkty W i W_1 – jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Ponadto, prosta przechodząca przez punkty T i T_1 jest także prostopadła do tej płaszczyzny. Zauważamy, że punkty: A, W, W_1, T i T_1 leżą w jednej płaszczyźnie — jest nią płaszczyzna $ACGE$. Na mocy cechy *kkk*, trójkąty prostokątne AW_1W i AT_1T są podobne, więc możemy zapisać równość

$$\frac{|TT_1|}{|AT_1|} = \frac{|WW_1|}{|AW_1|}, \text{ skąd wynika, że } |WW_1| = \frac{|TT_1| \cdot |AW_1|}{|AT_1|}.$$

Ponieważ $|TT_1| = 15$, $|AW_1| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ oraz $|AT_1| = 15\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$, więc

$$|WW_1| = \frac{15 \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2}}{\frac{25\sqrt{2}}{2}} = 9.$$

Oczywiście $|DP| = |BS| = |WW_1| = 9$.

Zadanie 31. (0–3)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie ma zera i na dokładnie dwóch miejscach są cyfry parzyste.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe

10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z trzech kroków. W kroku pierwszym obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwa miejsca (spośród siedmiu), na których stoją cyfry parzyste. Ten krok możemy wykonać czterema sposobami.

- Możemy skorzystać ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji ze zbioru siedmioelementowego; wyraża się ona współczynnikiem dwumianowym $\binom{7}{2}$. Ten współczynnik możemy odczytać z trójkąta Pascala lub obliczyć ze wzoru

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Mamy zatem

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 5!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=3\cdot 7=21.$$

- Możemy wszystkie te sposoby wyboru dwóch miejsc wypisać (kółko białe oznacza miejsce dla cyfry nieparzystej, kółko czarne — dla parzystej):

1:	●	●	○	○	○	○	○
2:	●	○	●	○	○	○	○
3:	●	○	○	●	○	○	○
4:	●	○	○	○	●	○	○
5:	●	○	○	○	○	●	○
6:	●	○	○	○	○	○	●
7:	○	●	●	○	○	○	○
8:	○	●	○	●	○	○	○
9:	○	●	○	○	●	○	○
10:	○	●	○	○	○	●	○
11:	○	●	○	○	○	○	●
12:	○	○	●	●	○	○	○
13:	○	○	●	○	●	○	○
14:	○	○	●	○	○	●	○
15:	○	○	●	○	○	○	●
16:	○	○	○	●	●	○	○
17:	○	○	○	●	○	●	○
18:	○	○	○	●	○	○	●
19:	○	○	○	○	●	●	○
20:	○	○	○	○	●	○	●
21:	○	○	○	○	○	●	●

- Możemy także te możliwości zliczać: jeśli pierwsza (licząc od lewej strony) cyfra parzysta stoi na pierwszym miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (od drugiego do siódmego); jeśli pierwsza (od lewej strony) cyfra parzysta stoi na drugim miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z pięciu miejsc i tak dalej. Wreszcie, jeśli pierwsza cyfra parzysta stoi na szóstym miejscu, to druga może stać tylko na miejscu siódmym. Łącznie mamy więc

  $$6+5+4+3+2+1=21$$

  sposobów wyboru dwóch miejsc dla cyfr parzystych.

- Możemy wreszcie rozumować następująco: jedną cyfrę parzystą możemy ustawić na jednym z 7 miejsc, drugą na jednym z sześciu miejsc. W ten sposób każde ustawienie policzyliśmy dwa razy, np. ustawienie

○ ○ ● ○ ● ○ ○

możemy otrzymać wybierając najpierw miejsce trzecie, a potem miejsce piąte lub wybierając najpierw miejsce piąte, a potem miejsce trzecie. Zatem liczba sposobów wyboru tych dwóch miejsc jest równa

$$\frac{7\cdot 6}{2}=7\cdot 3=21.$$

Obliczamy, na ile sposobów możemy na miejscach wybranych dla cyfr parzystych i nieparzystych napisać te cyfry. Skorzystamy dwa razy z reguły mnożenia. Najpierw na wybranych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Ponieważ w zapisie liczby nie ma zera, więc na każdym miejscu mamy do wyboru cztery cyfry: 2, 4, 6, 8. Mamy zatem $4^2=16$ sposobów zapisania cyfr parzystych na wybranych miejscach. Wreszcie na każdym z pozostałych pięciu miejsc zapisujemy jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Mamy zatem $5^5=3125$ sposobów zapisania cyfr nieparzystych na pozostałych miejscach.

Obliczamy, ile jest liczb siedmiocyfrowych spełniających warunki opisane w zadaniu. Korzystamy jeszcze raz z reguły mnożenia i otrzymujemy

$$21\cdot 4^2\cdot 5^5=21\cdot 16\cdot 3125=1050000$$

liczb.

Zadanie 32. (0–4)

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3. Cyfry mogą się powtarzać.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe

10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że istnieje tylko 27 liczb trzycyfrowych, których cyfry są wybrane spośród cyfr 1, 2 i 3. Pierwszą cyfrę możemy bowiem wybrać na 3 sposoby, drugą także na trzy sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią też na trzy sposoby. Najprostszy sposób rozwiązania zadania polega zatem na wypisaniu i dodaniu (np. na kalkulatorze) tych liczb. Oto one:

$$111+112+113+121+122+123+131+132+133=1098,$$

$$211+212+213+221+222+223+231+232+233=1998,$$

$$311+312+313+321+322+323+331+332+333=2898.$$

Suma wszystkich liczb jest równa

$$1098 + 1998 + 2898 = 5994.$$

Liczby te można łatwo dodać bez używania kalkulatora. Zauważmy, że sumy liczb w trzech wierszach są równe:

$$9 \cdot 100 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 900 + 198 = 1098,$$

$$9 \cdot 200 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 1800 + 198 = 1998,$$

$$9 \cdot 300 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 2700 + 198 = 2898.$$

Dodawanie

$$11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33 = 198$$

może być wykonane w pamięci; pozostałe dodawania można łatwo wykonać też w pamięci lub pisemnie. Najważniejsze było zauważenie, że we wszystkich dodawaniach występowała ta sama suma liczb dwucyfrowych i zmieniały się tylko sumy setek. Ta obserwacja będzie podstawą dla drugiego sposobu rozwiązania.

Obliczając sumę wszystkich 27 liczb, każdą z tych liczb zapiszemy w postaci

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

i będziemy oddzielnie dodawać wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i wreszcie oddzielnie cyfry jedności. Policzmy, w ilu liczbach jedynka występuje na pierwszym miejscu (tzn. jako cyfra setek). Otóż na drugim miejscu możemy postawić jedną z trzech cyfr i na trzecim też jedną z trzech cyfr. Zatem jedynka jest na pierwszym miejscu w dziewięciu liczbach. W sumie wszystkich dwudziestu siedmiu liczb dziewięć razy wystąpi składnik 100. Podobnie 9 razy wystąpi składnik 200 i 9 razy wystąpi składnik 300. Zatem składniki postaci $a \cdot 100$ dadzą sumę

$$9 \cdot 100 + 9 \cdot 200 + 9 \cdot 300 = 9 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 100 \cdot 6 = 5400.$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy na drugim miejscu (tzn. jako cyfra dziesiątek). Zatem składniki postaci $b \cdot 10$ dadzą sumę

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 20 + 9 \cdot 30 = 9 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 10 \cdot 6 = 540.$$

Wreszcie tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy jako cyfra jedności. Suma cyfr jedności jest zatem równa

$$9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 9 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 6 = 54.$$

Suma wszystkich liczb wynosi zatem

$$5400 + 540 + 54 = 5994.$$

Zadanie 33. (0–7)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe

10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Rozwiązanie

Rozkładamy liczbę 24 na czynniki pierwsze $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Mamy więc pięć możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24 (możliwości te parami wykluczają się):

1. Wśród cyfr tej liczby są trzy dwójki, jedna trójka i cztery jedynki ($24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8 \cdot \binom{7}{3} = 280$ — wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla trójki a następnie trzy miejsca z pozostałych siedmiu dla dwójki

   albo tak:
   - $\binom{8}{4} \cdot 4 = 280$ — wybieramy cztery miejsca dla cyfr różnych od jedynki, a następnie spośród nich wybieramy miejsce dla trójki,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = 280$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32221111.
2. Wśród cyfr tej liczby są trójka, czwórka, dwójka i pięć jedynek ($24 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ — wybieramy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa

   albo tak:
   - $\binom{8}{3} \cdot 3! = 336$ — wybieramy trzy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa, następnie przestawiamy te cyfry między sobą,

   albo tak:

- $\frac{8!}{5!}=336$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32411111.

3. Wśród cyfr tej liczby są trójka, ósemka i sześć jedynek $(24=3\cdot 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.
   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7=56$ — wybieramy miejsce dla trójki i z pozostałych dla ósemki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2}\cdot 2=56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla trójki i ósemki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!}=56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 38111111.
4. Wśród cyfr tej liczby są szóstka, czwórka i sześć jedynek $(24=6\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.
   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7=56$ — wybieramy miejsce dla szóstki i czwórki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2}\cdot 2=56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla szóstki i czwórki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!}=56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 64111111.
5. Wśród cyfr tej liczby są dwie dwójki, jedna szóstka i pięć jedynek$(24=6\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.
   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot\binom{7}{2}=168$ — wybieramy miejsce dla szóstki, następnie dwa miejsca z siedmiu dla dwójek

   albo tak:
   - $\binom{8}{3}\cdot 3=168$ — wybieramy trzy miejsca z ośmiu dla szóstki i dwóch dwójek, następnie spośród nich wybieramy miejsce dla szóstki,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{2!\cdot 5!}=168$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 62211111.

Zatem wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24, jest

$$280+336+56+56+168=896.$$

Zadanie 35. (0–3)

Losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe

10.2.R Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory (pary nieuporządkowane, kombinacje) zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia:

A — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8,

B — suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Mamy obliczyć $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{|A\cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają kombinacje złożone z jednej liczby nieparzystej i jednej parzystej,

$|B|=7\cdot 6=42$,

Zdarzeniu $A\cap B$ sprzyjają kombinacje złożone z liczby 8 i jednej liczby nieparzystej,

$|A\cap B|=1\cdot 7=7$,

stąd

$$P(A\mid B)=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jest równe $\frac{1}{6}$.