5. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie rozszerzonym wraz z rozwiązaniami

Zadanie 1. (0–1)

Funkcja określona wzorem $f(x)=|x-3|-4$ dla wszystkich liczb rzeczywistych

A. nie ma miejsc zerowych.
B. ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
C. ma dokładnie dwa miejsca zerowe.
D. ma więcej niż dwa miejsca zerowe.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

3.9.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż $||x+1|-2|=3$, $|x+3|+|x-5|>12$.

Rozwiązanie C

Zadanie 2. (0–3)

Niech $m=\log_{21}7$. Wykaż, że $\log_7 27=\frac{3(1-m)}{m}$.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

1.6. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

1.2.R Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Rozwiązanie (I sposób)

Zauważmy, że $\log_7 21 = \dfrac{1}{\log_{21} 7} = \dfrac{1}{m}$.

Zatem

$$\log_7 27 = \log_7 3^3 = 3\log_7 3 = 3\log_7\left(\frac{21}{7}\right) = 3\left(\log_7 21 - \log_7 7\right) = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3\cdot\frac{1-m}{m}.$$

To kończy dowód.

Rozwiązanie (II sposób)

Zauważamy, że

$$\frac{3(1-m)}{m} = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3\left(\log_7 21 - 1\right) = 3\left(\log_7 21 - \log_7 7\right) = 3\log_7\frac{21}{7} = \log_7 3^3 = \log_7 27,$$

co kończy dowód.

Zadanie 3. (0–2)

Oblicz najmniejszą liczbę naturalną *n* spełniającą nierówność $\left|\dfrac{2n-10}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{30}$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

2.6.R Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.

3.8.R Zdający rozwiązuje proste nierówności wymierne typu $\dfrac{x+1}{x+3} > 2$, $\dfrac{x+3}{x^2-16} < \dfrac{2x}{x^2-4x}$, $\dfrac{3x-2}{4x-7} \le \dfrac{1-3x}{5-4x}$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\left|\dfrac{2n-10}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{30}$. Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$\left|\frac{3(2n-10) - 2(3n+1)}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{30},$$

$$\left|\frac{-32}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{30},$$

$$\frac{32}{3(3n+1)} < \frac{1}{30},$$

$$3n+1 > 320,$$

$$n > 106\frac{1}{3}.$$

W powyższych przekształceniach dwukrotnie skorzystaliśmy z tego, że $3(3n+1)>0$. Zatem najmniejszą liczbą naturalną spełniającą podaną nierówność jest $n=107$.

Zadanie 4. (0–2)

Równanie $x^2+48x+2=0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2. Liczba $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

3.1.R Zdający stosuje wzory Viète'a.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1+x_2=-48$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 2$.

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}=\frac{(-48)^2-2\cdot 2}{2^2}=575.$$

Należy zakodować cyfry 5, 7, 5.

Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x)=x^4+2x^3-5x^2-6px+9$ jest podzielny przez dwumian $x-1$. Oblicz p. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

3.4.R Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Rozwiązanie

$W(x)$ jest podzielny przez $x-1$, zatem $W(1)=0$. $W(1)=7-6p$. Stąd $p=1{,}166...$.
Należy zakodować cyfry 1, 6, 6.

Uwaga

Należy zakodować cyfry **otrzymanego** wyniku, a nie wyniku przybliżonego, zatem cyfry 1, 6, 6, a nie 1, 6, 7.

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej *k* liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

2.7. (szkoła podstawowa) Zdający rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 5.

Rozwiązanie

Iloczyn jest podzielny przez 5, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l$ (*l* jest liczbą całkowitą), to pierwszy czynnik jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+1$, to czynnik $(k+9)=5l+10=5(l+2)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+2$, to czynnik $(k^2+1)=25l^2+20l+4+1=5(5l^2+4l+1)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+3$, to czynnik $(k^2+1)=25l^2+30l+9+1=5(5l^2+6+2)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l+4$, to czynnik $(k+1)=5l+4+1=5(l+1)$ jest podzielny przez 5.

Zadanie 7. (0–2)

Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $ab \le \frac{1}{4}$.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

2.1. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ *oraz* $a^2 - b^2$.

Rozwiązanie (I sposób)

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$ab \le \frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

Rozwiązanie (II sposób)

Z założenia mamy $b = 1 - a$. Przekształcamy nierówność $ab \le \frac{1}{4}$ w sposób równoważny

$$a(1-a) \le \frac{1}{4},$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} \ge 0,$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa. To kończy dowód.

Rozwiązanie (III sposób)

Oznaczmy: $a = \frac{1}{2} + x$, $b = \frac{1}{2} - x$. Wówczas

$$ab = \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{4} - x^2 \le \frac{1}{4},$$

co kończy dowód.

Zadanie 8. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f określona wzorem

$$f\left(x\right)=\left(m^2-1\right)x^2-2\left(1-m\right)x+2$$

przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

3.2.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Rozwiązanie

Funkcja $f\left(x\right)=\left(m^2-1\right)x^2-2\left(1-m\right)x+2$ w zależności od parametru m jest liniowa lub kwadratowa. Rozważmy dwa przypadki:

1. Gdy $m^2-1=0$, to funkcja f jest liniowa.
    1. Dla $m=-1$ funkcja ma wzór $f(x)=-4x+2$, więc $m=-1$ nie spełnia warunków zadania.
    2. Dla $m=1$ funkcja ma wzór $f(x)=2$, więc $m=1$ spełnia warunki zadania.
2. Gdy $m^2-1\neq 0$, to funkcja f jest kwadratowa. Funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy parabola będąca jej wykresem leży w całości nad osią Ox. Funkcja $f\left(x\right)=\left(m^2-1\right)x^2-2\left(1-m\right)x+2$ ma tę własność, kiedy zachodzą warunki:
    1. $m^2-1>0$,
    2. $\Delta<0$.

    Pierwszy warunek jest spełniony dla $m\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

    Warunek $\Delta<0$ jest spełniony, gdy

$$4\left(1-m\right)^2-8\left(m^2-1\right)<0,$$

$$\left(m-1\right)^2-2\left(m-1\right)\left(m+1\right)<0,$$

$$\left(m-1\right)\left(m-1-2m-2\right)<0,$$

$$\left(m-1\right)\left(-m-3\right)<0,$$

$$-\left(m-1\right)\left(m+3\right)<0,$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

Zatem funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Uwzględniając oba przypadki, otrzymujemy $m \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, +\infty)$.

Zadanie 9. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{-5x}{x+3}$ jest równa

A. $-\infty$ B. 0 C. 6 D. $+\infty$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

11.1.R Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych.

Rozwiązanie A

Zadanie 10. (0–2)

Oblicz $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-2n^3 + 3n}{(1-4n)^3}$.

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

5.2.R Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$ *oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.*

Rozwiązanie

Obliczamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n}-4\right)^3}=\frac{1}{32}=0,03125$.

Ponieważ $\frac{1}{32}=0,03125$, więc należy zakodować cyfry: 0, 3, 1.

Zadanie 11. (0–2)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich taki, że $a_1=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

5.3.R Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz i trzeci wyraz tego ciągu są odpowiednio równe: $a_1=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{1}{3}$. Ponieważ $a_3=a_1\cdot q^2$, stąd $q^2=\frac{a_3}{a_1}=\frac{4}{9}$. Zatem $q=-\frac{2}{3}$ lub $q=\frac{2}{3}$. Wyrazy ciągu są dodatnie, więc $q=\frac{2}{3}$. Ponieważ $|q|=\left|\frac{2}{3}\right|<1$, więc

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{4}.$$

Suma S wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich jest równa: $S=\frac{9}{4}$.

Zadanie 12 (0–2)

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f(x)=\dfrac{2x^4+15}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych *x*, takich że $x\neq-\sqrt{6}$ i $x\neq\sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=1$.

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego wyniku.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

11.2.R Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną:

$$f'(x)=\frac{\left(2x^4+15\right)'\left(6-x^2\right)-\left(2x^4+15\right)\left(6-x^2\right)'}{\left(6-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{8x^3\left(6-x^2\right)+2x\left(2x^4+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2}=\frac{2x\left(-2x^4+24x^2+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2},$$

$$f'(1)=\frac{2(-2+24+15)}{(5)^2}=\frac{2\cdot37}{25}=\frac{74}{25}=2{,}96.$$

Należy zakodować cyfry: 2, 9, 6.

Zadanie 13. (0–3)

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta *l* o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji *f*.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

11.3.R Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Rozwiązanie

Zapisujemy równanie prostej l w postaci kierunkowej $y = 10x + 9$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 12x^2 - 2$.

Zauważamy, że dla $x = -1$ oraz dla $x = 1$ pochodna funkcji f ma wartość 10 i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej l.

Obliczamy wartość funkcji f w punkcie $x = -1$: $f(-1) = -1$ oraz w punkcie $x = 1$: $f(1) = 3$.

Punkt o współrzędnych $(-1, -1)$ leży na prostej l, natomiast punkt o współrzędnych $(1, 3)$ nie leży na tej prostej. Zatem prosta o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji f, co kończy dowód.

Zadanie 14. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Wymagania ogólne

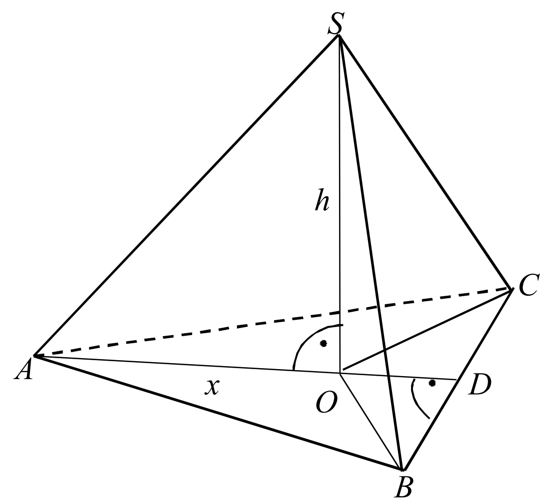
III. Modelowanie matematyczne.
Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.

Wymagania szczegółowe

11.6.R Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Rozwiązanie

Niech $x = |AO| = |BO| = |CO|$ (zobacz rysunek) oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz $h = |SO|$ oznacza wysokość tego ostrosłupa. Wówczas $x + h = 24$.



Wysokość AD w trójkącie ABC jest równa $|AD| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2}$. Zatem promień x okręgu opisanego na trójkącie ABC (podstawie ostrosłupa) jest równy: $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} = \frac{|AB|\sqrt{3}}{3}$, stąd $|AB| = x\sqrt{3}$. Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa: $P = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$.

Ponadto z równości $x + h = 24$ otrzymujemy $h = 24 - x$, gdzie $0 < x < 24$.

Zatem objętość tego ostrosłupa jest określona wzorem: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2\sqrt{3}}{4} \cdot (24 - x)$, czyli $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3 + 24x^2\right)$.

Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0 < x < 24$ funkcja V określona wzorem $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3 + 24x^2\right)$ przyjmuje wartość największą.

Rozważamy funkcję $f(x) = -x^3 + 24x^2$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji f: $f'(x) = -3x^2 + 48x$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = 16$, $x_2 = 0$. Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(16, +\infty)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $(0, 16)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty, 0\right\rangle$ oraz $\left\langle 16, +\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\langle 0, 16\rangle$.

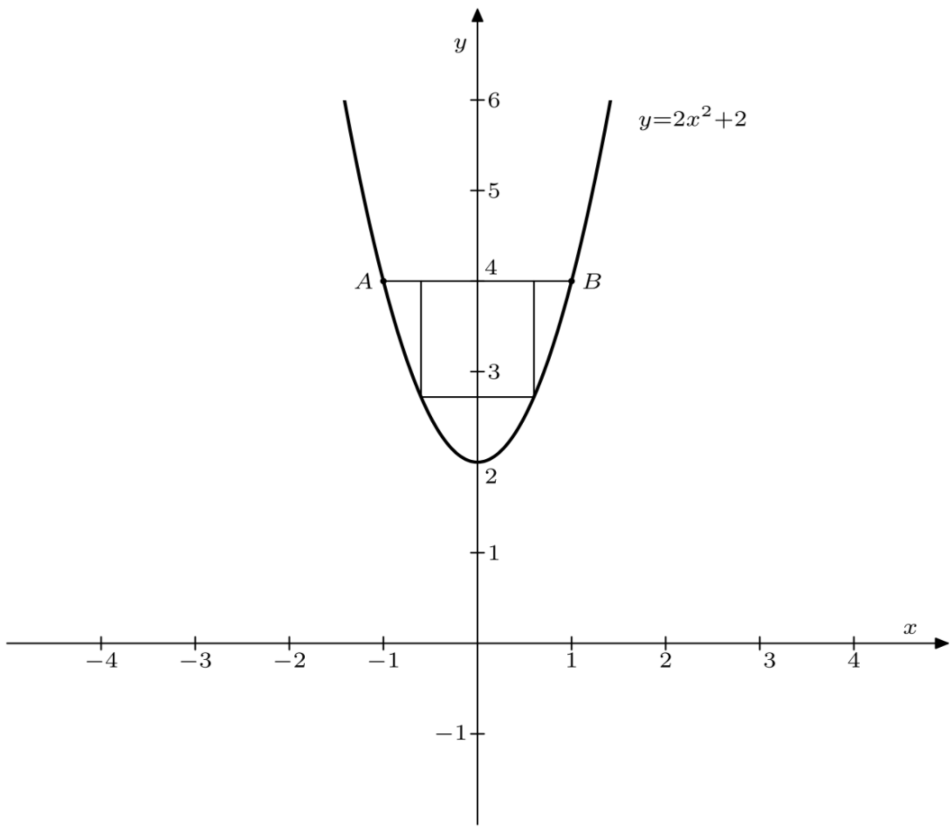
Ponieważ $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} f(x)$ dla $x \in (0, 24)$, więc w przedziale $x \in (0, 24)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = 16$ funkcja V przyjmuje wartość największą.

Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-16^3 + 24 \cdot 16^2\right) = 512\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest największa i równa $V = 512\sqrt{3}$, gdy promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 16.

Zadanie 15. (0–7)

Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na odcinku AB, gdzie $A=(-1,4)$ i $B=(1,4)$, a pozostałe dwa na paraboli o równaniu $y=2x^2+2$ (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary tego z prostokątów, który ma największe pole. Oblicz to pole.



Wymagania ogólne

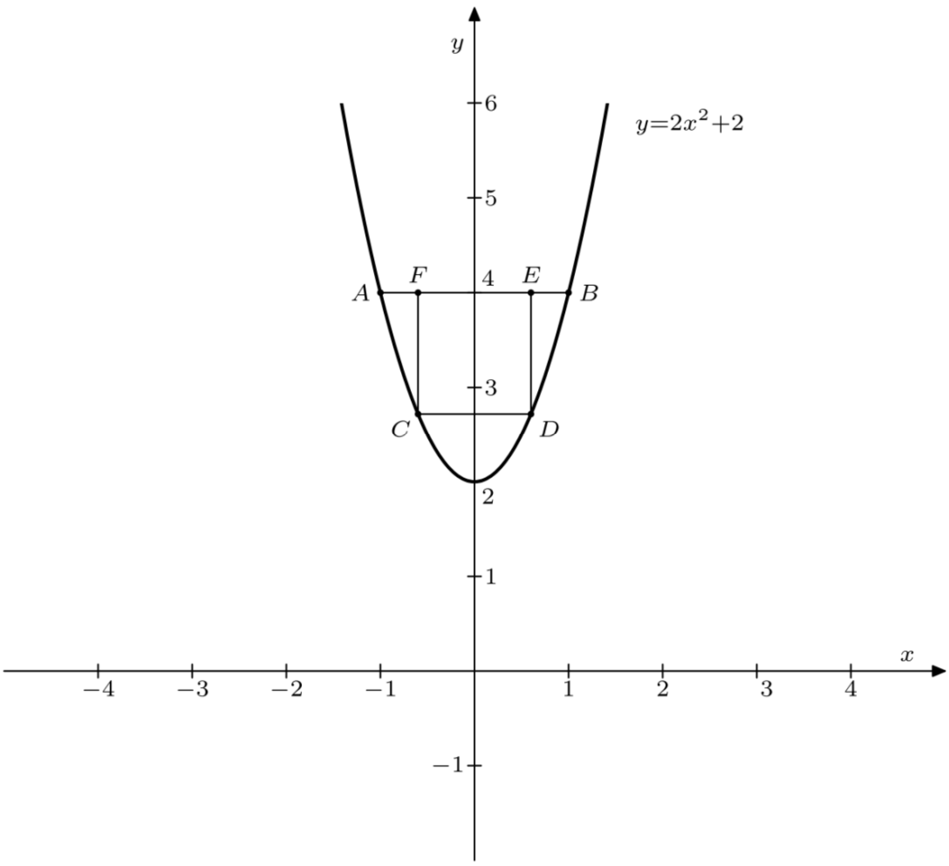
III. Modelowanie matematyczne.
Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.

Wymagania szczegółowe

11.6.R Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Rozwiązanie

Niech punkty C i D leżą na paraboli $y=2x^2+2$, a punkty E i F leżą na odcinku AB (zob. rysunek). Oznaczmy przez x odległość punktu D od osi Oy.



Wówczas punkt D ma współrzędne $D=\left(x,2x^2+2\right)$, punkt C ma współrzędne $C=\left(-x,2x^2+2\right)$. Punkty E i F leżą na prostej o równaniu $y=4$, zatem ich współrzędne są równe: $E=(x,4)$ i $F=(-x,4)$.

Wyznaczamy długości boków CD i DE prostokąta $CDEF$:

$|CD|=2x$ oraz $|DE|=2-2x^2$ dla $0<x<1$.

Zatem pole prostokąta $CDEF$ jest określone wzorem: $P(x)=2x\cdot\left(2-2x^2\right)$, czyli $P(x)=-4x^3+4x$ dla $0<x<1$.

Rozważamy funkcję $f(x)=-4x^3+4x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji f: $f'(x)=-12x^2+4$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ponadto:

- $f'(x)<0$ w każdym z przedziałów $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$,
- $f'(x)>0$ w przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ oraz $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $P(x) = f(x)$ dla $x \in (0,1)$, więc w przedziale $x \in (0,1)$ funkcja $P(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.

Obliczamy wymiary prostokąta: $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|DE| = 2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$.

Największe pole ma prostokąt o wymiarach $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{4}{3}$. Jest ono równe $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5. Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.

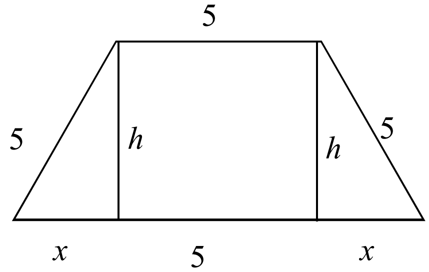
Wymagania szczegółowe

11.6.R Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Rozwiązanie

Niech $2x+5$ oznacza długość dłuższej podstawy, a h wysokość trapezu. Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P = \frac{2\cdot 5 + 2x}{2}\cdot h = (5+x)\cdot h \text{ i } 0 < x < 5.$$



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność $x^2 + h^2 = 5^2$, stąd $h = \sqrt{25 - x^2}$.

Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P(x)=(5+x)\cdot\sqrt{25-x^2}=\sqrt{(5+x)^2\cdot(25-x^2)}=$$
$$=\sqrt{(5+x)^3\cdot(5-x)}=\sqrt{-x^4-10x^3+250x+625},$$

gdzie $0<x<5$.

Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0<x<5$ funkcja P określona wzorem $P(x)=\sqrt{-x^4-10x^3+250x+625}$ przyjmuje wartość największą.

Ponieważ funkcja pierwiastkowa ($y=\sqrt{t}$) jest rosnąca, więc wystarczy zbadać funkcję $f(x)=-x^4-10x^3+250x+625$. Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$f'(x)=-4x^3-30x^2+250.$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=-5$, $x_2=\frac{5}{2}$.

Ponadto:

- $f'(x)<0$ w każdym z przedziałów $(-\infty,-5)$ oraz $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$,
- $f'(x)>0$ w przedziale $\left(-5,\frac{5}{2}\right)$.

Zatem funkcja *f* jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty,-5\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{5}{2},+\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle-5,\frac{5}{2}\right\rangle$.

Ponieważ $P(x)=\sqrt{f(x)}$ dla $x\in(0,5)$, więc w przedziale $x\in(0,5)$ funkcja $P(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=\frac{5}{2}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.

Zauważmy wreszcie, że jeżeli $x=\frac{5}{2}$, to $2x+5=10$. Zatem dłuższa podstawa ma długość 10.

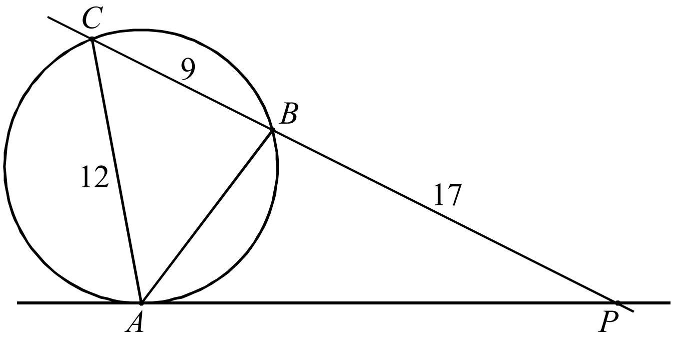
Obliczamy największe pole trapezu dla $x=\frac{5}{2}$:

$$P(x)=\left(5+\frac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{75}{4}\sqrt{3}.$$

Największe pole ma trapez, którego dłuższa podstawa ma długość 10. Pole tego trapezu jest równe $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 17. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków AC, BC i PB zostały podane na rysunku.



Oblicz długość odcinka AB. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

7.4.R Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

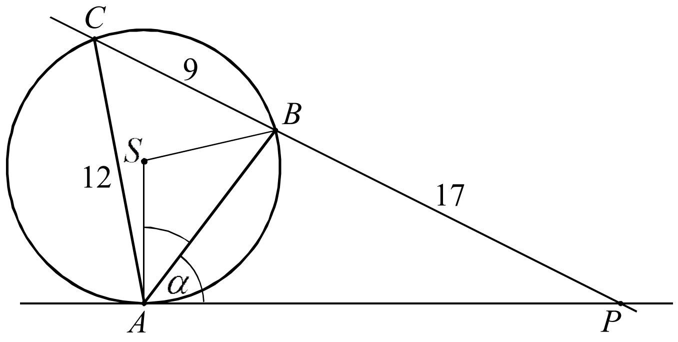
Rozwiązanie (I sposób)

Niech S oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech $\alpha = |\sphericalangle PAB|$. Kąt PAS jest prosty, więc $|\sphericalangle BAS| = 90° - \alpha$. Trójkąt ABS jest równoramienny, zatem

$$|\sphericalangle ASB| = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle BAS| = 180° - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2\alpha .$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ASB| = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha .$$



Oznaczmy $|AB| = x$ oraz $|PA| = y$.

Trójkąty APB i CPA są podobne, gdyż $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCA|$ i kąt przy wierzchołku P jest wspólnym kątem tych trójkątów. Zatem

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|},$$

$$\frac{y}{26} = \frac{17}{y},$$

$$y^2 = 17 \cdot 26.$$

Stąd $y = \sqrt{17 \cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów APB i CPA otrzymujemy też

$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CA|}{|PC|},$$

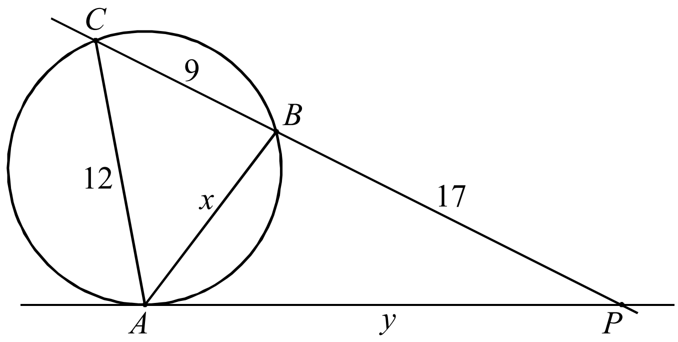
$$\frac{x}{y} = \frac{12}{26}.$$

Zatem $x = \frac{12y}{26} = \frac{12\sqrt{17 \cdot 26}}{26} = \frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = 9,7032...$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

Rozwiązanie (II sposób)

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że kąty PAB i ACB są równe. Ponadto kąt przy wierzchołku P jest wspólnym kątem trójkątów APB i CPA. Zatem te trójkąty są podobne.



Stąd

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|},$$

$$\frac{y}{26} = \frac{17}{y},$$

$$y^2 = 17 \cdot 26 .$$

Zatem $y = \sqrt{17 \cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów APB i CPA otrzymujemy też

$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CA|}{|PC|},$$

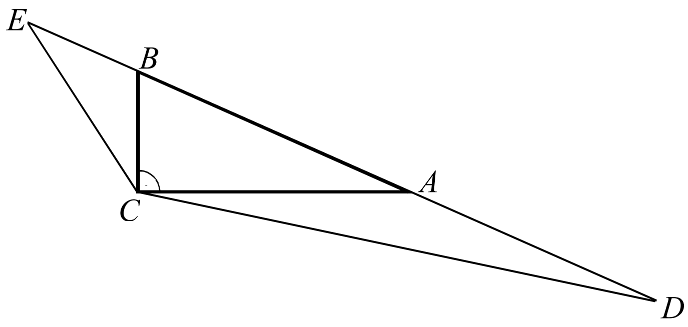
$$\frac{x}{y} = \frac{12}{26}.$$

Stąd $x = \frac{12y}{26} = \frac{12\sqrt{17 \cdot 26}}{26} = \frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = 9,7032...$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

Zadanie 18. (0–6)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie równym $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.

Wymagania ogólne

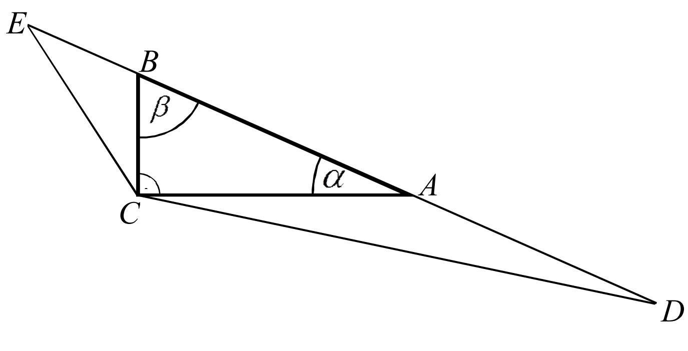
V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

7.5.R Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Rozwiązanie

Niech $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ (zobacz rysunek).



Kąty CAD i CBE to kąty przyległe odpowiednio do kątów BAC i ABC trójkąta ABC, więc

$$|\sphericalangle CAD| = 180° - \alpha \text{ oraz } |\sphericalangle CBE| = 180° - \beta .$$

Trójkąty CAD i CBE są równoramienne, więc

$$|\sphericalangle DCA| = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2} \text{ oraz } |\sphericalangle ECB| = \frac{180° - (180° - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2} .$$

Zatem miara kąta ECD jest równa

$$\left|\sphericalangle ECD\right| = \left|\sphericalangle DCA\right| + 90^\circ + \left|\sphericalangle ECB\right| = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\right).$$

Stąd

$$\left|\sphericalangle ECD\right| = 90^\circ + \frac{1}{2}\left(\alpha+\beta\right) = 135^\circ.$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ECD wynika, że

$$\frac{\left|ED\right|}{\sin\sphericalangle ECD} = 2R,$$

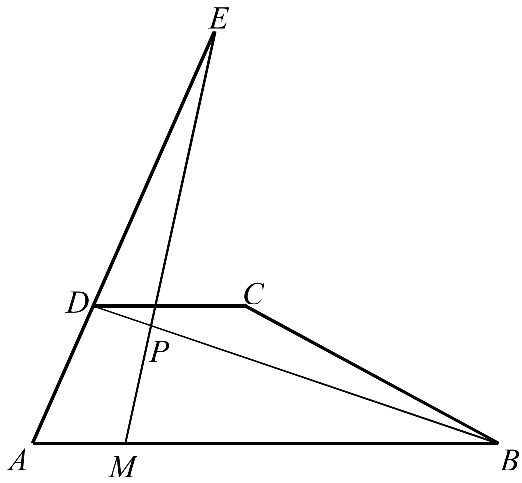
gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie ECD. Ponieważ $\left|ED\right| = a+b+c = 2p$ i $\sin\sphericalangle ECD = \sin 135^\circ = \sin\left(180^\circ - 45^\circ\right) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc

$$2R = \frac{2p}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Stąd $R = p\sqrt{2}$, co kończy dowód.

Zadanie 19. (0–3)

Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $\left|AE\right| = 3\cdot\left|AD\right|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $\left|MB\right| = 4\cdot\left|AM\right|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $\left|BP\right| = 6\cdot\left|PD\right|$.

Wymagania ogólne

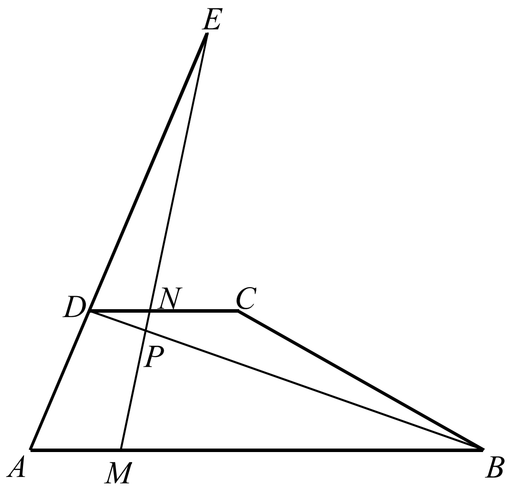
V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

7.3. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Rozwiązanie

Niech N oznacza punkt przecięcia odcinka EM z prostą DC.



Trójkąt AME jest podobny do trójkąta DNE (kąty MAE i NDE są równe oraz kąty AME i DNE są równe, gdyż proste AB i DC są równoległe). Stąd

$$\frac{|AM|}{|AE|}=\frac{|DN|}{|DE|},$$

ale $|AE|=3\cdot|AD|$, więc $|DN|=\frac{2}{3}\cdot|AM|$.

Trójkąt MBP jest podobny do trójkąta NDP (kąty MBP i NDP są równe oraz kąty BMP i DNP, gdyż proste AB i DC są równoległe). Stąd

$$\frac{|BP|}{|BM|}=\frac{|DP|}{|DN|},$$

ale $|BM|=4\cdot|AM|$, więc $|BP|=\frac{4\cdot|AM|\cdot|DP|}{|DN|}=\frac{4\cdot|AM|}{\frac{2}{3}|AM|}\cdot|DP|=6\cdot|DP|$.

To kończy dowód.

Zadanie 20. (0–4)

Okrąg jest styczny do osi Ox w punkcie $A=(2,0)$. Punkt $B=(-1,9)$ leży na tym okręgu. Wyznacz równanie tego okręgu.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

8.5.R Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *oraz opisuje koła za pomocą nierówności.*

Rozwiązanie

Niech $S=(a,b)$ będzie środkiem szukanego okręgu. Ponieważ okrąg ten jest styczny do osi Ox w punkcie $A=(2,0)$, więc $S=(2,b)$. Z definicji okręgu wynika, że $|AS|=|BS|$, czyli

$$(2-2)^2+(b-0)^2=(2+1)^2+(b-9)^2.$$

Stąd

$$b^2=9+b^2-18b+81,$$
$$b=5.$$

Zatem $S=(2,5)$, a równanie okręgu ma postać $(x-2)^2+(y-5)^2=25$.

Zadanie 21. (0–5)

Okrąg o środku $S=(3,2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

8.5.R Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *oraz opisuje koła za pomocą nierówności.*

Rozwiązanie

Środkiem okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ jest punkt $S_1=(6,8)$, a promień tego okręgu jest równy 10. Środki S i S_1 okręgów leżą na prostej o równaniu $y=2x-4$.

Szukana styczna jest prostopadła do tej prostej, więc ma równanie postaci $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Odległość środka $S_1=(6,8)$ od stycznej jest równa 10, zatem

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 6+8-b\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=10,$$

$$|11-b|=10\cdot\sqrt{\frac{5}{4}},$$

$$|11-b|=5\sqrt{5}.$$

Stąd $11-b=5\sqrt{5}$ lub $11-b=-5\sqrt{5}$, czyli $b=11-5\sqrt{5}$ lub $b=11+5\sqrt{5}$. Otrzymujemy więc dwie proste o równaniach $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ oraz $y=-\frac{1}{2}x+11+5\sqrt{5}$.

Odległość środka S od prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ jest równa

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 3+2+11-5\sqrt{5}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{29}{5}\sqrt{5}-10.$$

Ponieważ $\frac{29}{5}\sqrt{5}-10<10$, więc ta prosta jest szukaną styczną.

Zadanie 22. (0–1)

Równanie $\sin^2 x=\sin x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$

A. ma dokładnie 1 rozwiązanie.
B. ma dokładnie 2 rozwiązania.
C. ma dokładnie 3 rozwiązania.
D. nie ma rozwiązań.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

6.6.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin^2 x = \sin x$ do postaci $\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0$, zatem $\sin x = 0$ lub $\sin x = 1$. Rozwiązaniami równania $\sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ jest $x = 0$ oraz $x = \pi$, a rozwiązaniem równania $\sin x = 1$ jest $x = \frac{\pi}{2}$. Stąd równanie $\sin^2 x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ ma dokładnie 3 rozwiązania.

Zdający powinien zaznaczyć odpowiedź C.

Zadanie 23. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

6.5.R Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.

6.6.R Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie, korzystając ze wzoru na sumę sinusów: $2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$.

Stąd $\cos 2x \cdot (2\sin 3x - 1) = 0$. Zatem $\cos 2x = 0$ lub $2\sin 3x - 1 = 0$.

Rozwiązaniami równania $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$ są liczby: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 24. (0–3)

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1+3\cos^2 2\alpha$.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

2.1.R Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^3$ *oraz* $a^3\pm b^3$.

6.4. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *oraz* $\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Rozwiązanie

Korzystając z tożsamości

$$a^6+b^6=\left(a^2+b^2\right)\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(\left(a^2+b^2\right)^2-3a^2b^2\right),$$

przekształcamy wyrażenie $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)$ i otrzymujemy:

$$4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$
$$=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

Przekształcamy teraz prawą stronę równości, korzystając ze wzoru na cosinus kąta podwojonego.

$$1+3\cos^2 2\alpha=1+3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2=1+3\left(\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$
$$=1+3\left(1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=4-12\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

To kończy dowód.

Zadanie 25. (0–2)

Rozwiąż nierówność $\cos 5x>\dfrac{1}{2}$ dla $-\pi\le x\le\pi$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

Wymagania szczegółowe

6.4.R Zdający posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$*,* $\cos x \le a$*,* $\operatorname{tg} x > a$*).*

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\cos 5x > \frac{1}{2}$.

Zatem $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 5x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, czyli

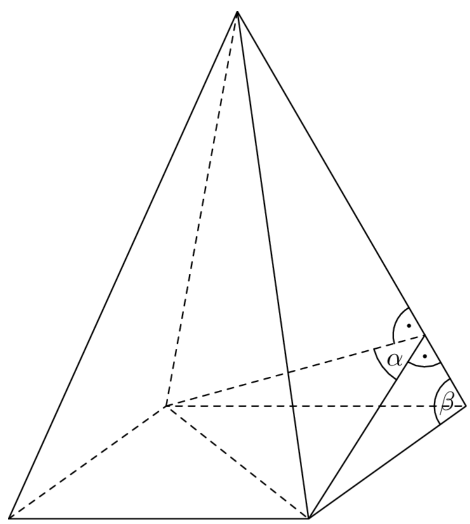
$-\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} < x < \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami tej nierówności dla $-\pi \le x \le \pi$ są:

$-\frac{13\pi}{15} < x < -\frac{11\pi}{15}$ lub $-\frac{7\pi}{15} < x < -\frac{5\pi}{15}$ lub $-\frac{\pi}{15} < x < \frac{\pi}{15}$ lub $\frac{5\pi}{15} < x < \frac{7\pi}{15}$ lub $\frac{11\pi}{15} < x < \frac{13\pi}{15}$.

Zadanie 26. (0–3)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa) – zobacz rysunek.
Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = -1$.



Wymaganie ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

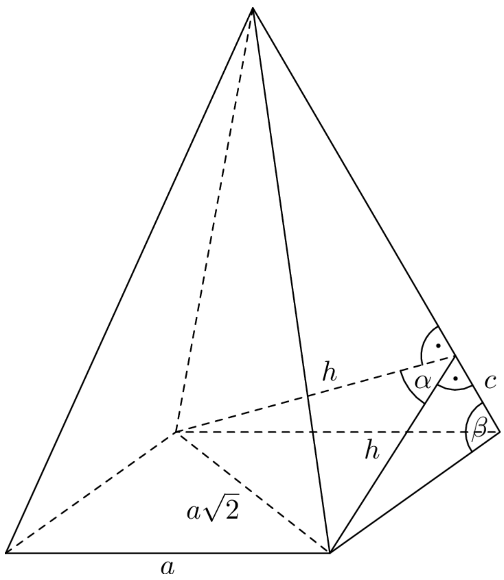
9.4. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami.

9.1. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów.

9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Rozwiązanie

Oznaczmy, tak jak na poniższym rysunku: a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy, c – długość odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości h.



Na podstawie twierdzenia cosinusów mamy:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos\alpha .$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{h^2 - a^2}{h^2}.$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy

$$c^2 = a^2 - h^2 .$$

Ponadto

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{c}, \text{ a stąd wynika, że } \mathrm{tg}^2\beta = \frac{h^2}{c^2} .$$

Obliczamy zatem

$$\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\beta = \frac{h^2 - a^2}{h^2} \cdot \frac{h^2}{c^2} = \frac{-\left(a^2 - h^2\right)}{c^2} = \frac{-c^2}{c^2} = -1.$$

To kończy dowód.

Zadanie 27. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Wymaganie ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

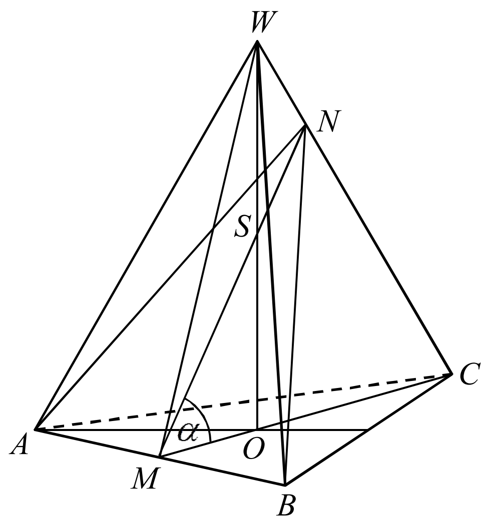
9.2.R Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia takie jak na rysunku.



W trójkącie równobocznym ABC mamy:

$$|AB| = a, \quad |CM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |OM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Stąd

$$|OS| = |OM| \cdot \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } |OW| = 2 \cdot |OS| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Zatem

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha=\frac{a^3}{12}\cdot\mathrm{tg}\alpha.$$

Następnie

$$|MW|^2=|OM|^2+|OW|^2=\frac{3a^2}{36}+\frac{3a^2}{9}\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{3}\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{a^2}{12}\left(1+4\mathrm{tg}^2\alpha\right),$$

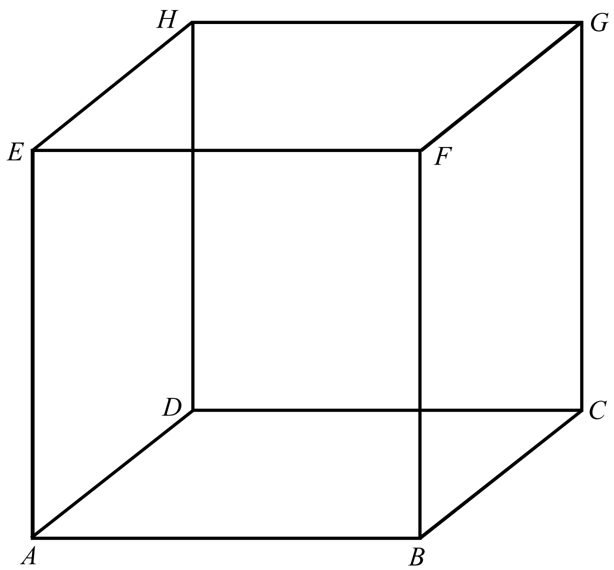
$$|MW|=\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}$$

i stąd otrzymujemy

$$P_b=3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Zadanie 28. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.



Wymaganie ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

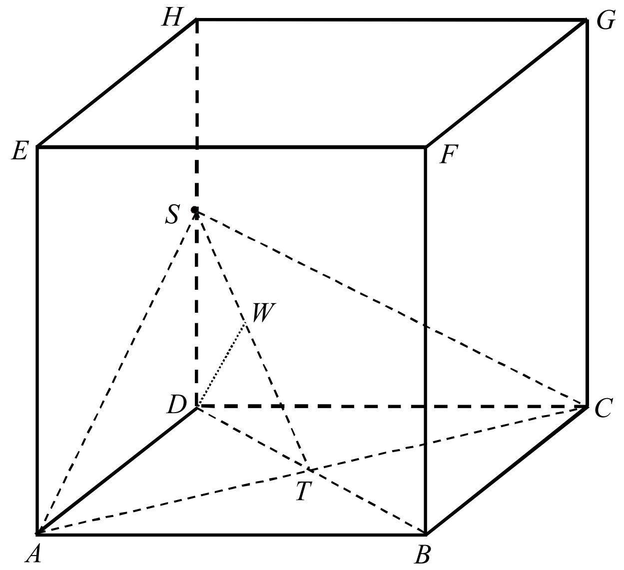
Wymagania szczegółowe

9.2. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Rozwiązanie

Łączymy punkty A i S, A i C oraz C i S (zobacz rysunek). Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy tego sześcianu.



Punkt S leży na krawędzi DH, więc $AS = CS$, a zatem trójkąt ACS, stanowiący podstawę ostrosłupa $ACSD$, jest trójkątem równoramiennym. Wynika stąd, że odcinek ST jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka ST obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego TSD:

$$|ST|^2 = |SD|^2 + |DT|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ czyli } |ST| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zauważamy, że odcinek DW jest wysokością trójkąta prostokątnego TDS poprowadzoną do przeciwprostokątnej TS. Długość odcinka DW obliczymy zapisując na dwa sposoby pole trójkąta TDS:

$$\frac{1}{2} \cdot |SD| \cdot |TD| = \frac{1}{2} \cdot |ST| \cdot |DW|,$$

$$|DW| = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego SWD wynika, że:

$$|SW| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Teraz zauważamy, że wysokość ST trójkąta równoramiennego ACS jest zawarta w osi symetrii tego trójkąta. Wynika stąd, że $AW = CW$. Długość odcinka AW obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ATW, w którym

$$|TW| = |ST| - |SW| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Otrzymujemy zatem

$$|AW|^2 = |AT|^2 + |TW|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{6},$$

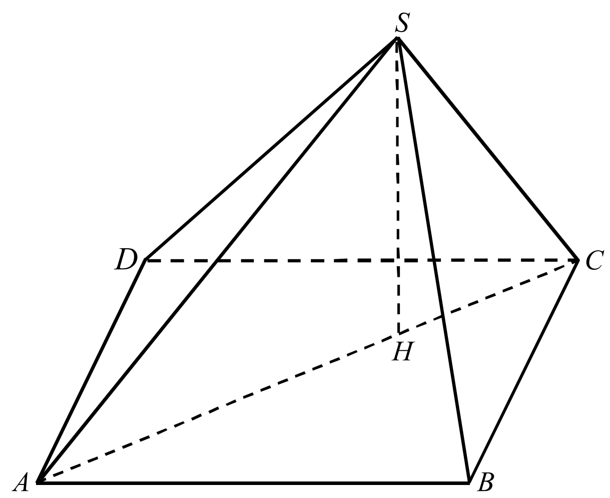
skąd

$$|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Podsumowując, szukane odcinki mają długości: $|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $|SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Zadanie 29. (0–6)

Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2:1$ (zobacz rysunek). Krawędzie boczne BS i DS mają długość równą 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS.



Wymaganie ogólne

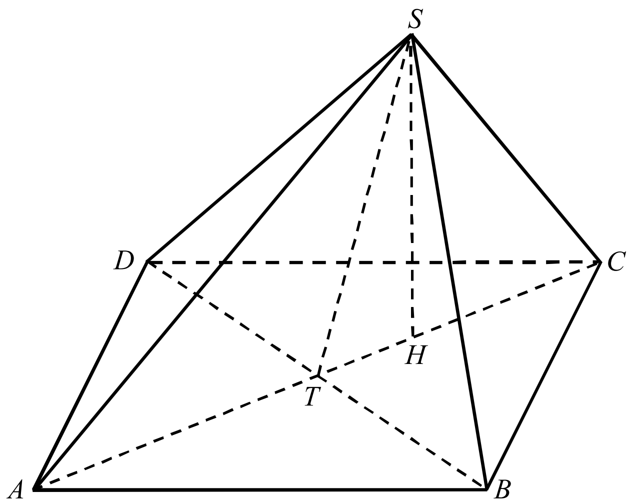
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Rozwiązanie

Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy ostrosłupa (zobacz rysunek).



Ponieważ $|AC| = \sqrt{2}$, więc $|CH| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $|HT| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Trójkąt BSD jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, dlatego że jego ramiona mają długości $|BS| = |DS| = 1$, a podstawa $|BD| = \sqrt{2}$. Stąd wynika, że $|ST| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Obliczamy zatem wysokość HS tego ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta SHT:

$$|HS|^2 = |ST|^2 - |HT|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}\text{, skąd wynika, że } |HS| = \frac{2}{3}.$$

Objętość V tego ostrosłupa jest zatem równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Pozostaje obliczyć jeszcze długości krawędzi bocznych AS i CS. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dwukrotnie, najpierw do trójkąta AHS, otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AH|^2 + |HS|^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\text{, więc } |AS| = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

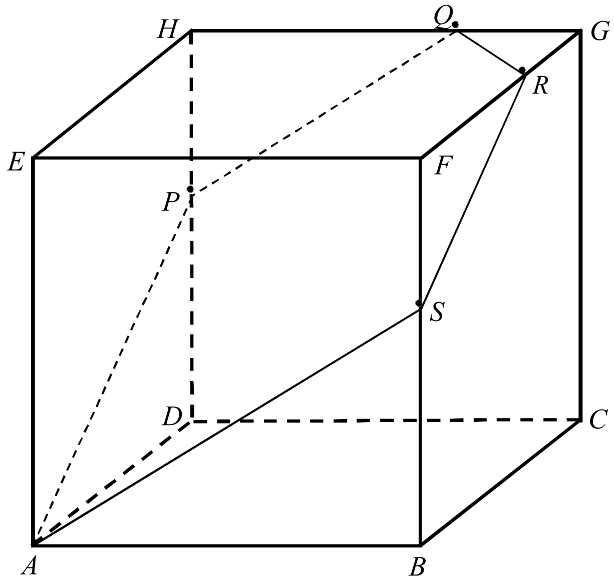
natomiast do trójkąta CHS

$$|CS|^2 = |CH|^2 + |HS|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\text{, skąd } |CS| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Uwaga
Rozważany ostrosłup nie jest prawidłowy, a wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.

Zadanie 30. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



Wymaganie ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

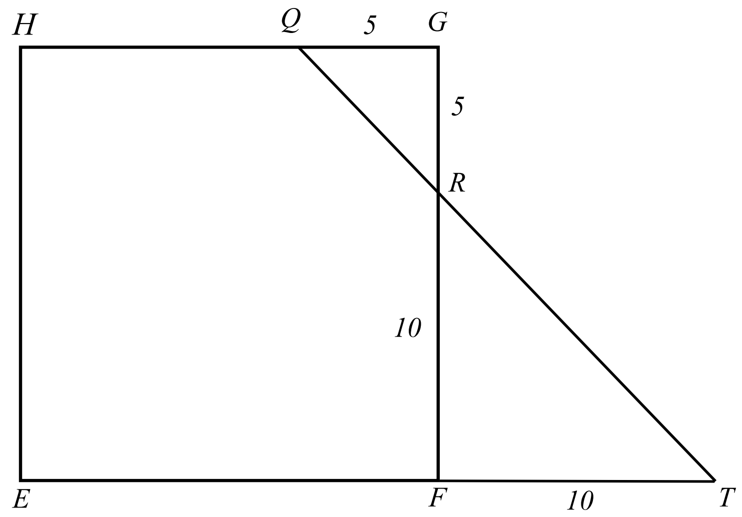
9.2.R Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

9.1. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), oblicza miary tych kątów.

7.4.R Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

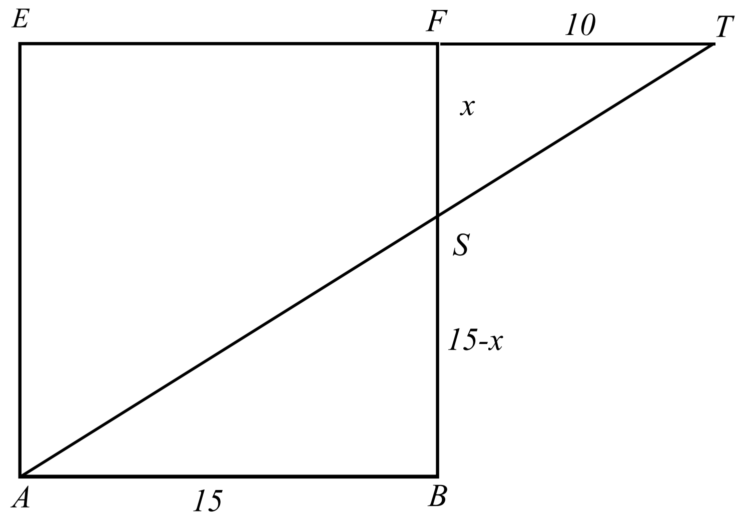
Rozwiązanie (I sposób)

Rozważamy kwadrat $EFGH$. Niech T oznacza punkt przecięcia przedłużeń odcinków QR i EF (zobacz rysunek).



Trójkąty prostokątne RFT i RGQ są podobne na mocy cechy *kkk*. Stąd wynika, że $|FT| = 10$.

Teraz rozważamy kwadrat $ABFE$ (zobacz rysunek).



Trójkąty prostokątne ABS i TFS są podobne na mocy cechy *kkk*. Możemy więc zapisać równanie

$$\frac{|SF|}{|FT|} = \frac{|BS|}{|AB|}, \text{ a zatem } \frac{x}{10} = \frac{15-x}{15}.$$

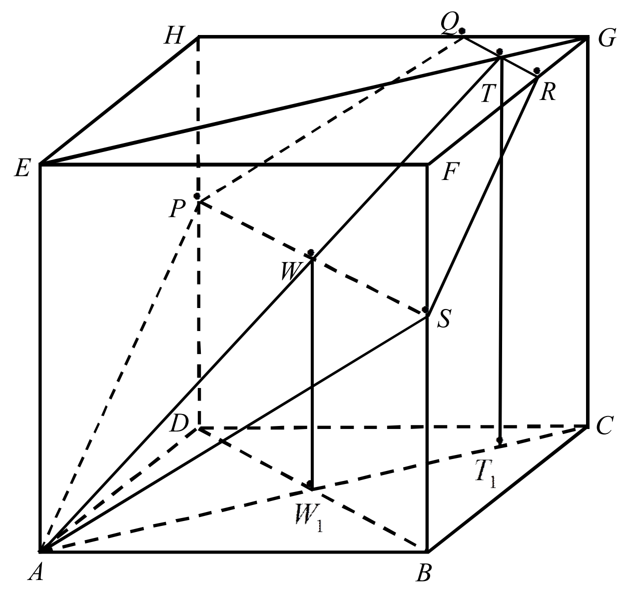
Rozwiązujemy to równanie

$$15x = 150 - 10x, \quad x = 6.$$

Zatem długość szukanego odcinka BS jest równa 9. Ponieważ punkty B i D leżą symetrycznie względem płaszczyzny $ACGE$, więc $|DP| = |BS| = 9$.

Rozwiązanie (II sposób)

Rysujemy przekątne AC, BD, EG oraz łączymy punkty P i S. Oznaczmy kolejno: W – środek odcinka PS, W_1 – punkt przecięcia przekątnych AC i BD, T – środek odcinka QR (zobacz rysunek). Niech ponadto T_1 będzie takim punktem przekątnej AC, że $GT = CT_1$.



Zauważamy, że $DP = BS$ co wynika, z symetrii względem płaszczyzny $ACGE$. Zatem czworokąt $BSPD$ jest prostokątem. Stąd wynika, że prosta przechodząca przez środki boków tego prostokąta – punkty W i W_1 – jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Ponadto, prosta przechodząca przez punkty T i T_1 jest także prostopadła do tej płaszczyzny. Zauważamy, że punkty: A, W, W_1, T i T_1 leżą w jednej płaszczyźnie — jest nią płaszczyzna $ACGE$. Na mocy cechy *kkk*, trójkąty prostokątne AW_1W i AT_1T są podobne, więc możemy zapisać równość

$$\frac{|TT_1|}{|AT_1|} = \frac{|WW_1|}{|AW_1|}, \text{ skąd wynika, że } |WW_1| = \frac{|TT_1| \cdot |AW_1|}{|AT_1|}.$$

Ponieważ $|TT_1| = 15$, $|AW_1| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ oraz $|AT_1| = 15\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$, więc

$$|WW_1| = \frac{15 \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2}}{\frac{25\sqrt{2}}{2}} = 9.$$

Oczywiście $|DP| = |BS| = |WW_1| = 9$.

Zadanie 31. (0–3)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z trzech kroków. W kroku pierwszym obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwa miejsca (spośród siedmiu), na których stoją cyfry parzyste. Ten krok możemy wykonać czterema sposobami.

- Możemy skorzystać ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji ze zbioru siedmioelementowego; wyraża się ona współczynnikiem dwumianowym $\binom{7}{2}$. Ten współczynnik możemy odczytać z trójkąta Pascala lub obliczyć ze wzoru

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

  Mamy zatem

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 5!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=3\cdot 7=21.$$

- Możemy po prostu wszystkie te sposoby wyboru dwóch miejsc wypisać (kółko białe oznacza miejsce dla cyfry nieparzystej, kółko czarne — dla parzystej):

1:	●	●	○	○	○	○	○
2:	●	○	●	○	○	○	○
3:	●	○	○	●	○	○	○
4:	●	○	○	○	●	○	○
5:	●	○	○	○	○	●	○
6:	●	○	○	○	○	○	●
7:	○	●	●	○	○	○	○
8:	○	●	○	●	○	○	○
9:	○	●	○	○	●	○	○
10:	○	●	○	○	○	●	○
11:	○	●	○	○	○	○	●
12:	○	○	●	●	○	○	○
13:	○	○	●	○	●	○	○
14:	○	○	●	○	○	●	○
15:	○	○	●	○	○	○	●
16:	○	○	○	●	●	○	○
17:	○	○	○	●	○	●	○
18:	○	○	○	●	○	○	●
19:	○	○	○	○	●	●	○
20:	○	○	○	○	●	○	●
21:	○	○	○	○	○	●	●

- Możemy także te możliwości zliczać: jeśli pierwsza (licząc od lewej strony) cyfra parzysta stoi na pierwszym miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (od drugiego do siódmego); jeśli pierwsza (od lewej strony) cyfra parzysta stoi na drugim miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z pięciu miejsc i tak dalej. Wreszcie, jeśli pierwsza cyfra parzysta stoi na szóstym miejscu, to druga może stać tylko na miejscu siódmym. Łącznie mamy więc

$$6+5+4+3+2+1=21$$

  sposobów wyboru dwóch miejsc dla cyfr parzystych.

- Możemy wreszcie rozumować następująco: jedną cyfrę parzystą możemy ustawić na jednym z 7 miejsc, drugą na jednym z sześciu miejsc. W ten sposób każde ustawienie policzyliśmy dwukrotnie, np. ustawienie

○ ○ ● ○ ● ○ ○

możemy otrzymać wybierając najpierw miejsce trzecie, a potem miejsce piąte lub wybierając najpierw miejsce piąte, a potem miejsce trzecie. Zatem liczba sposobów wyboru tych dwóch miejsc jest równa

$$\frac{7\cdot 6}{2}=7\cdot 3=21.$$

W kroku drugim obliczamy, na ile sposobów możemy na miejscach wybranych dla cyfr parzystych i nieparzystych napisać te cyfry. Skorzystamy dwukrotnie z reguły mnożenia. Najpierw na wybranych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Ponieważ w zapisie liczby nie występuje zero, więc na każdym miejscu mamy do wyboru cztery cyfry: 2, 4, 6, 8. Mamy zatem $4^2=16$ sposobów zapisania cyfr parzystych na wybranych miejscach. Wreszcie na każdym z pozostałych pięciu miejsc zapisujemy jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Mamy zatem $5^5=3125$ sposobów zapisania cyfr nieparzystych na pozostałych miejscach.

W kroku trzecim obliczamy, ile jest liczb siedmiocyfrowych spełniających warunki opisane w zadaniu. Korzystamy jeszcze raz z reguły mnożenia i otrzymujemy

$$21\cdot 4^2\cdot 5^5=21\cdot 16\cdot 3125=1\ 050\ 000$$

liczb.

Zadanie 32. (0–4)

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że istnieje tylko 27 liczb trzycyfrowych, których cyfry są wybrane spośród cyfr 1, 2 i 3. Pierwszą cyfrę możemy bowiem wybrać na 3 sposoby, drugą także na trzy sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią też na trzy sposoby. Najprostszy sposób rozwiązania zadania polega zatem na wypisaniu i dodaniu (np. na kalkulatorze) tych liczb. Oto one:

$$111+112+113+121+122+123+131+132+133=1098,$$

$$211+212+213+221+222+223+231+232+233=1998,$$

$$311+312+313+321+322+323+331+332+333=2898.$$

Suma wszystkich liczb jest równa

$$1098 + 1998 + 2898 = 5994.$$

Liczby te można łatwo dodać bez używania kalkulatora. Zauważmy, że sumy liczb w trzech wierszach są równe:

$$9 \cdot 100 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 900 + 198 = 1098,$$

$$9 \cdot 200 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 1800 + 198 = 1998,$$

$$9 \cdot 300 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 2700 + 198 = 2898.$$

Dodawanie

$$11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33 = 198$$

może być wykonane w pamięci; pozostałe dodawania można łatwo wykonać też w pamięci lub pisemnie. Najważniejsze było zauważenie, że we wszystkich dodawaniach występowała ta sama suma liczb dwucyfrowych i zmieniały się tylko sumy setek. Ta obserwacja będzie podstawą dla drugiego sposobu rozwiązania.

Obliczając sumę wszystkich 27 liczb, każdą z tych liczb zapiszemy w postaci

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

i będziemy oddzielnie dodawać wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i wreszcie oddzielnie cyfry jedności. Policzmy, w ilu liczbach jedynka występuje na pierwszym miejscu (tzn. jako cyfra setek). Otóż na drugim miejscu możemy postawić jedną z trzech cyfr i na trzecim też jedną z trzech cyfr. Zatem jedynka jest na pierwszym miejscu w dziewięciu liczbach. W sumie wszystkich dwudziestu siedmiu liczb dziewięć razy wystąpi składnik 100. Podobnie 9 razy wystąpi składnik 200 i 9 razy wystąpi składnik 300. Zatem składniki postaci $a \cdot 100$ dadzą sumę

$$9 \cdot 100 + 9 \cdot 200 + 9 \cdot 300 = 9 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 100 \cdot 6 = 5400.$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy na drugim miejscu (tzn. jako cyfra dziesiątek). Zatem składniki postaci $b \cdot 10$ dadzą sumę

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 20 + 9 \cdot 30 = 9 \cdot 10 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 10 \cdot 6 = 540.$$

Wreszcie tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy jako cyfra jedności. Suma cyfr jedności jest zatem równa

$$9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 9 \cdot (1 + 2 + 3) = 9 \cdot 6 = 54.$$

Suma wszystkich liczb wynosi zatem

$$5400 + 540 + 54 = 5994.$$

Zadanie 33. (0–7)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Rozwiązanie

Rozkładamy liczbę 24 na czynniki pierwsze $24=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

Mamy więc pięć, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24:

1. Wśród cyfr tej liczby są trzy dwójki, jedna trójka i cztery jedynki ($24=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot\binom{7}{3}=280$ — wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla trójki a następnie trzy miejsca z pozostałych siedmiu dla dwójki

   albo tak:
   - $\binom{8}{4}\cdot 4=280$ — wybieramy cztery miejsca dla cyfr różnych od jedynki, a następnie spośród nich wybieramy miejsce dla trójki,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{3!\cdot 4!}=280$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32221111.
2. Wśród cyfr tej liczby są trójka, czwórka, dwójka i pięć jedynek ($24=3\cdot 4\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7\cdot 6=336$ — wybieramy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa

   albo tak:
   - $\binom{8}{3}\cdot 3!=336$ — wybieramy trzy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa, następnie przestawiamy te cyfry między sobą,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{5!}=336$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32411111.

3. Wśród cyfr tej liczby są trójka, ósemka i sześć jedynek $(24 = 3\cdot 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.

   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8\cdot 7 = 56$ — wybieramy miejsce dla trójki i z pozostałych dla ósemki

   albo tak:

   - $\binom{8}{2}\cdot 2 = 56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla trójki i ósemki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{6!} = 56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 38111111.

4. Wśród cyfr tej liczby są szóstka, czwórka i sześć jedynek $(24 = 6\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.

   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8\cdot 7 = 56$ — wybieramy miejsce dla szóstki i czwórki

   albo tak:

   - $\binom{8}{2}\cdot 2 = 56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla szóstki i czwórki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{6!} = 56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 64111111.

5. Wśród cyfr tej liczby są dwie dwójki, jedna szóstka i pięć jedynek$(24 = 6\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1)$.

   Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:

   - $8\cdot\binom{7}{2} = 168$ — wybieramy miejsce dla szóstki, następnie dwa miejsca z siedmiu dla dwójek

   albo tak:

   - $\binom{8}{3}\cdot 3 = 168$ — wybieramy trzy miejsca z ośmiu dla szóstki i dwóch dwójek, następnie spośród nich wybieramy miejsce dla szóstki,

   albo tak:

   - $\frac{8!}{2!\cdot 5!} = 168$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 62211111.

Zatem wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24, jest

$$280 + 336 + 56 + 56 + 168 = 896.$$

Zadanie 34. (0–6)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.1.R Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Rozwiązanie

Wszystkie liczby stucyfrowe o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5 możemy podzielić na 4 grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu liczby:

1. Liczba $5000...000$,w której po cyfrze 5następuje 99 zer. Jest jedna taka liczba.
2. Liczby postaci $3000...1...000...1...000$, w których po cyfrze 3występuje 97 cyfr 0i dwie cyfry 1, stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{2} = \frac{99\cdot 98}{2} = 99\cdot 49 = 4851$ takich liczb.
3. Liczby postaci $1000...3...000...1...000$ lub $1000...1...000...3...000$, w których po cyfrze 1 występuje 97 cyfr 0 oraz cyfry 1 i 3(w dowolnej kolejności), stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $99\cdot 98 = 9702$ takich liczb.
4. Liczby postaci $1000...1...000...1...000...1...000...1...000$, w których po cyfrze 1 występuje 95 cyfr 0i cztery cyfry 1, stojące na czterech miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{4} = \frac{99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{24} = 33\cdot 49\cdot 97\cdot 24 = 3\,764\,376$ takich liczb.

Zatem wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5, jest

$$1 + 4851 + 9702 + 3\,764\,376 = 3\,778\,930.$$

Zadanie 35. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.2.R Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory (pary nieuporządkowane, kombinacje) zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia:

A — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8,
B — suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Mamy obliczyć $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{|A\cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają kombinacje złożone z jednej liczby nieparzystej i jednej parzystej, $|B|=7\cdot 6=42$,

Zdarzeniu $A\cap B$ sprzyjają kombinacje złożone z liczby 8 i jednej liczby nieparzystej, $|A\cap B|=1\cdot 7=7$,

stąd

$$P(A\,|\,B)=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jest równe $\dfrac{1}{6}$.

Zadanie 36. (0–3)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,7$ i $P(B)=0,8$, to $P(A\,|\,B)\geq 0,625$.

$P(A\,|\,B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.2.R Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Rozwiązanie

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Wykażemy najpierw, że jeżeli $P(A)=0,7$ i $P(B)=0,8$, to $P(A\cap B)\geq 0,5$.

Wiemy, że $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ oraz $P(A\cup B)\leq 1$.

Mamy więc: $1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, stąd $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$,

czyli $P(A\cap B)\geq 0,5$.

Stąd $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\geq\dfrac{0,5}{0,8}=0,625$.

Zadanie 37. (0–4)

Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1,2,3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

10.3.R Zdający korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia dla zdarzeń:
B_1 – wylosujemy liczbę 1,
B_2 – wylosujemy liczbę 2,
B_3 – wylosujemy liczbę 3,
A – otrzymamy co najmniej jednego orła.

Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, ponieważ

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega, \ B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B_3 = B_2 \cap B_3 = \varnothing, \ P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3} > 0.$$

Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym do zdarzenia A, otrzymujemy

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3).$$

Ponieważ $P(A \mid B_1) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid B_2) = \frac{3}{4}$, $P(A \mid B_3) = \frac{7}{8}$, więc

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{17}{24}.$$

Zatem prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe $\frac{17}{24}$.

Uwaga

Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą drzewa.

Zadanie 38. (0–2)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.

B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Wymagania szczegółowe

10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$$