4. Przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym wraz z rozwiązaniami

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $3^{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$ jest równa

A. 3^3 B. $3^{\frac{32}{9}}$ C. 3^4 D. 3^5

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

1.4 Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Rozwiązanie C

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\log 24$ jest równa

A. $2\log 2 + \log 20$ B. $\log 6 + 2\log 2$ C. $2\log 6 - \log 12$ D. $\log 30 - \log 6$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

1.6. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Rozwiązanie B

Zadanie 3. (0–1)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2-x} = \frac{1}{2}$ jest liczba

A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{8}{3}$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

3.1. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności.

Rozwiązanie D

Zadanie 4. (0–1)

Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2+5x+6=0$ jest

A. -6 B. -3 C. -2 D. -1

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

3.4. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie B

Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq 5$ jest

A. $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ B. $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{5},+\infty\right)$ C. $\left\langle\sqrt{5},+\infty\right)$ D. $\left\langle 5,+\infty\right)$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

3.5. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie B

Zadanie 6. (0–1)

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(2-m)x+1$. Wynika stąd, że

A. $m=0$ B. $m=1$ C. $m=2$ D. $m=3$

Wymagania ogólne

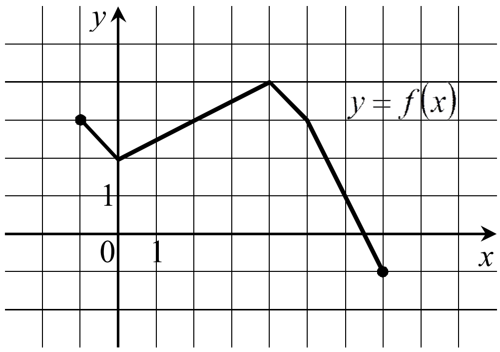
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.7. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Rozwiązanie D

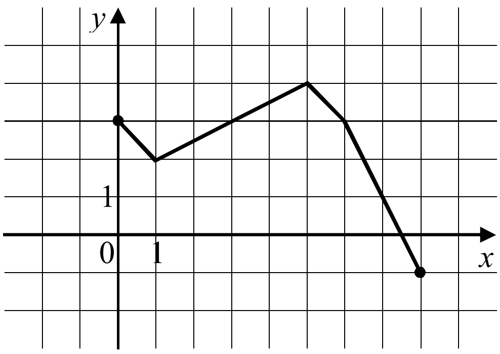
Zadanie 7. (0—1)



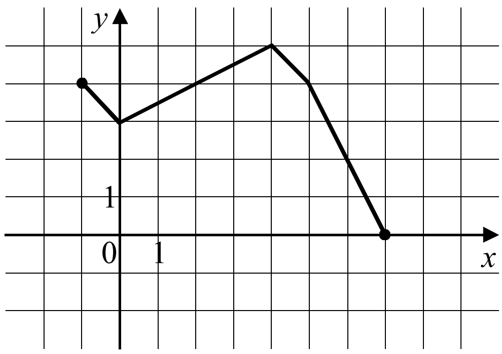
Rysunek powyżej przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x+1)$.

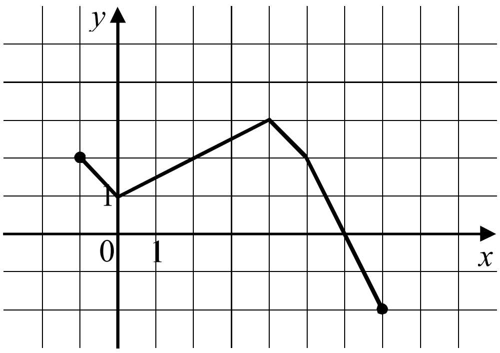
A.



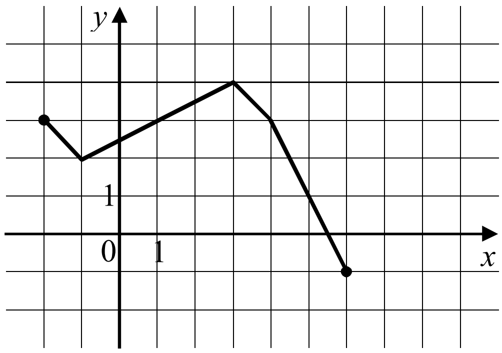
B.



C.



D.



Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.4. Zdający na podstawie wykresu funkcji y = f(x) szkicuje wykresy funkcji y = f(x + a), y = f(x) + a, y = –f(x), y = f(–x).

Rozwiązanie D

Zadanie 8. (0–1)

Wskaż równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y=-x^2+4x-11$.

A. $x=-4$ B. $x=-2$ C. $x=2$ D. $x=4$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.10. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Rozwiązanie C

Zadanie 9. (0–1)

Prosta o równaniu $y=a$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=-x^2+6x-10$. Wynika stąd, że

A. $a=3$ B. $a=0$ C. $a=-1$ D. $a=-3$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.10. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Rozwiązanie C

Zadanie 10. (0–1)

Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x)=x^2+4x-3$ w przedziale $\langle 0,3\rangle$?

A. –7 B. –4 C. –3 D. –2

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.11. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Rozwiązanie C

Zadanie 11. (0–1)

Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y=4x+5$?

A. $y=-4x+3$ B. $y=-\frac{1}{4}x+3$ C. $y=\frac{1}{4}x+3$ D. $y=4x+3$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

8.2. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.

Rozwiązanie B

Zadanie 12. (0–1)

Punkty $A=(-1,3)$ i $C=(7,9)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta *ABCD*. Promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy

A. 10 B. $6\sqrt{2}$ C. 5 D. $3\sqrt{2}$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

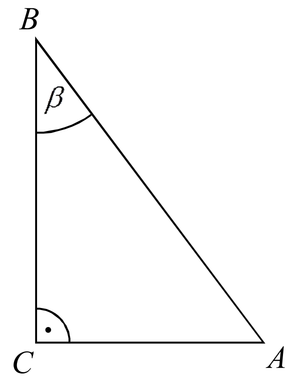
Wymagania szczegółowe

8.6. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.

Rozwiązanie C

Zadanie 13. (0–1)

Dane są długości boków $|BC| = 5$ i $|AC| = 3$ trójkąta prostokątnego ABC o kącie ostrym β (zobacz rysunek). Wtedy



A. $\sin\beta = \frac{3}{5}$ B. $\sin\beta = \frac{4}{5}$

C. $\sin\beta = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ D. $\sin\beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

6.1. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Rozwiązanie C

Zadanie 14. (0–1)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas

A. $\cos\alpha < \frac{3}{4}$ B. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$ D. $\cos\alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

6.5. Zdający znając wartość jednej z funkcji sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Rozwiązanie D

Zadanie 15. (0–1)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Jaki warunek spełnia kąt α?

A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 60^\circ$ D. $\alpha > 60^\circ$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

6.2. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora).

Rozwiązanie A

Zadanie 16. (0–1)

Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa 180°. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. 60° B. 90° C. 120° D. 135°

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

7.1. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Rozwiązanie C

Zadanie 17. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla $n \geq 1$. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$ B. $a_3 = -27$ C. $a_3 = 0$ D. $a_3 > 0$

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

5.1. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Rozwiązanie C

Zadanie 18. (0–1)

Liczby $x-1$, 4 i 8 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. 3 B. 1 C. –1 D. –7

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie B

Zadanie 19. (0–1)

Liczby -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. –3 B. $-1{,}5$ C. 1 D. 15

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

5.4. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Rozwiązanie A

Zadanie 20. (0–1)

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, jest

A. 25 B. 24 C. 21 D. 20

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Rozwiązanie C

Zadanie 21. (0–1)

Liczba wszystkich sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa

A. 25 B. 20 C. 15 D. 12

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Rozwiązanie B

Zadanie 22. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x}=-\frac{1}{2}$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

3.8. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest określona dla $x \neq \frac{1}{2}$. Przenosimy wszystko na lewą stronę i sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika:

$$\frac{2-3x}{1-2x}+\frac{1}{2}=0, \qquad \frac{2(2-3x)+(1-2x)}{2(1-2x)}=0, \qquad \frac{5-8x}{2(1-2x)}=0.$$

Stąd otrzymujemy $5-8x=0$, czyli $x=\frac{5}{8}$. Dla tej wartości x obie strony równania są określone, więc liczba $x=\frac{5}{8}$ jest szukanym rozwiązaniem równania.

Zadanie 23. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \leq 0$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

3.5. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego lub dostrzegając rozkład na czynniki $x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$, otrzymujemy dwa pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. Ponieważ parabola o równaniu $y = x^2 + 6x - 7$ ma ramiona skierowane do góry, leży ona poniżej osi Ox między swoimi miejscami zerowymi. Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział domknięty $\langle -7, 1 \rangle$.

Zadanie 24. (0–2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0,1 \rangle$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.11. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Rozwiązanie

Wyznaczmy współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 1$. Mamy $x_w = -\frac{b}{2a} = 3$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -8$. Ponieważ parabola ma ramiona skierowane do góry, to w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ dana funkcja maleje. Zatem maleje także na zawartym w nim przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Wobec tego najmniejszą wartość przyjmie ona w prawym końcu, czyli dla $x = 1$. Tą wartością jest $y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -4$.

Zadanie 25. (0–2)

O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1)=2$ oraz że do wykresu tej funkcji należy punkt $P=(-2,3)$. Wyznacz wzór funkcji f.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

4.6. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.

Rozwiązanie

Funkcja f jest liniowa, więc jej wzór możemy zapisać w postaci: $f(x)=ax+b$. Z warunku $f(1)=2$ wynika, że $2=a+b$. Skoro punkt P należy do jej wykresu, to mamy także $3=f(-2)=-2a+b$. Rozwiązujemy otrzymany układ równań i otrzymujemy $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{7}{3}$. Zatem szukany wzór ma postać $f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

Zadanie 26. (0–2)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y=2x-11$ i przechodzącej przez punkt $P=(1,2)$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

8.3. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Rozwiązanie

Wszystkie proste równoległe do danej prostej mają taki sam współczynnik kierunkowy. Szukamy zatem prostej o równaniu postaci $y=2x+b$. Ponieważ szukana prosta przechodzi przez punkt $P=(1,2)$, otrzymujemy $2=2\cdot 1+b$, skąd $b=0$. Zatem prosta ta ma równanie $y=2x$.

Zadanie 27. (0–2)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty: $A=(-2,-1)$, $B=(6,1)$, $C=(7,10)$.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

8.5.Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka.

8.1. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).

Rozwiązanie

Wiemy, że szukana prosta przechodzi przez punkt $C=(7,10)$ oraz przez punkt D, będący środkiem boku AB. Zatem korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy $D=\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=(2,0)$. Ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty otrzymujemy: $(y-10)(2-7)-(0-10)(x-7)=0$, a stąd $-5y+10x-20=0$, czyli $-y+2x-4=0$.

Zadanie 28. (0–2)

W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

6.1.Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Rozwiązanie

Niech α będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 2, zaś β – kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 4. Zauważmy, że $\sin\alpha=\cos\beta$ oraz $\cos\alpha=\sin\beta$, więc mamy $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos\beta$, czyli szukana wartość nie zależy od wyboru kąta.

Przeciwprostokątna w danym trójkącie ma długość $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

Zadanie 29. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

6.4. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *oraz* $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Rozwiązanie

Mamy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, więc $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{15}$.

Zatem $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha = 3 + \frac{2}{15} = \frac{47}{15}$.

Zadanie 30. (0–2)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

5.1.Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Rozwiązanie

Szukamy liczb naturalnych $n \geq 1$ spełniających nierówność $n^2 - 2n - 24 < 0$.
Zapiszmy tę nierówność w postaci $n^2 - 2n + 1 - 25 < 0$, $(n-1)^2 - 5^2 < 0$, skąd $(n-1-5)(n-1+5) < 0$, $(n-6)(n+4) < 0$. Ponieważ $n+4 > 0$, otrzymujemy $n < 6$. Zatem liczba n może przyjmować jedną z pięciu wartości: 1, 2, 3, 4, 5, czyli ciąg ma pięć wyrazów ujemnych.

Zadanie 31. (0–2)

Liczby 2, $x-3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Zdający używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

Wymagania szczegółowe

5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Mamy $a_1 = 2$ oraz $a_2 = x-3$, zatem różnica ciągu wynosi $r = (x-3)-2 = x-5$. Ponadto $8 = a_4 = a_1 + 3r = 2 + 3(x-5)$, skąd $6 = 3(x-5)$ i w końcu $x = 7$.

Zadanie 32. (0–2)

Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Ponieważ dokładnie co piąta liczba naturalna daje z dzielenia przez 5 resztę 2, to różnica danego ciągu arytmetycznego wynosi 5. Wobec tego $12 = a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 10$, skąd $a_1 = 2$. Wobec tego $a_{15} = a_1 + 14r = 2 + 14 \cdot 5 = 72$.

Zadanie 33. (0–2)

Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

5.4. (gimnazjum) Zdający stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Rozwiązanie

Otrzymany prostokąt ma boki długości $0{,}9a$ oraz $1{,}2b$. Z porównania obwodów obu prostokątów otrzymujemy związek $2\cdot 0{,}9a + 2\cdot 1{,}2b = 2a + 2b$, skąd $0{,}4b = 0{,}2a$. Wobec tego $\frac{a}{b} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2$.

Zadanie 34. (0–2)

Udowodnij, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Wymagania szczegółowe

2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnych liczb x, y mamy $(x-y)^2 \geq 0$, skąd $x^2 + y^2 \geq 2xy$, co kończy dowód.

Zadanie 35. (0–2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie
Zdarzeniami elementarnymi są pary liczb całkowitych (a,b), gdzie $1 \le a,b \le 6$ – mamy 36 takich par. Zdarzenia elementarne sprzyjające to pary $(1,5)$ oraz $(5,1)$. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Zadanie 36. (0–4)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3=4,\ a_6=19$. Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $(0,200)$?

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

5.3. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

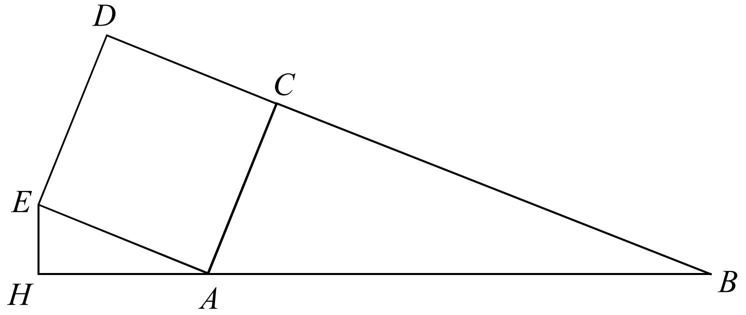
Rozwiązanie
Mamy $4=a_1+2r$, $19=a_1+5r$. Stąd $3r=15,\ r=5$ oraz $a_1=-6$. Pytamy, dla jakich n mamy $0<a_n<200$, czyli $0<-6+(n-1)\cdot 5<200$.

Stąd $6<5(n-1)<206,\quad \frac{6}{5}<n-1<\frac{206}{5},\quad \frac{11}{5}<n<\frac{211}{5}.$

Pierwszą nierówność spełniają liczby $n \ge 3$, a drugą liczby $n \le 42$. Zatem liczb naturalnych spełniających obydwa warunki mamy 40 i tyle też wyrazów ciągu leży w przedziale $(0,200)$.

Zadanie 37. (0–4)

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego *ABC*, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| = 5$, $|BC| = 12$ zbudowano kwadrat *ACDE* (zobacz rysunek). Punkt *H* leży na prostej *AB* i kąt $|\sphericalangle EHA| = 90°$. Oblicz pole trójkąta *HAE*.



Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

7.3. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąt prostokątny *EAH* jest podobny do trójkąta *ABC,* gdyż kąty *EAH* oraz *ABC* są przystające, jako kąty o ramionach równoległych. Oznaczymy przez *s* skalę podobieństwa trójkąta *EAH* do trójkąta *ABC*. Wtedy

$$P_{EAH} = s^2 P_{ABC} = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = s^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30s^2.$$

Pozostaje zatem obliczyć *s*.

Mamy

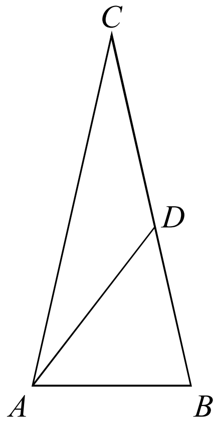
$$s = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AC|}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{5}{13}$$

Zatem

$$P_{\Delta EAH} = 30 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{750}{169}.$$

Zadanie 38. (0–4)

Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ADC| = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$.



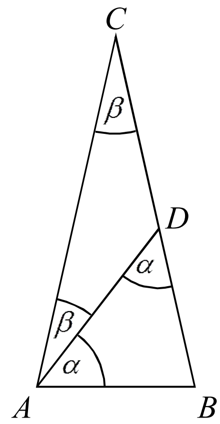
Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Wymagania szczegółowe

10.17 (gimnazjum) Zdający rozpoznaje figury, które mają oś symetrii i figury, które mają środek symetrii. Wskazuje oś symetrii i środek symetrii figury.

Rozwiązanie I



Niech $\alpha = |\sphericalangle BAD|$ i $\beta = |\sphericalangle ACD|$. Trójkąty ABD, ACD i ABC są równoramienne, więc

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BAD| = \alpha, \quad |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = \beta$$

$$\text{oraz } |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha + \beta.$$

Suma miar kątów trójkąta ACD jest równa 180°, więc

$$|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - 2\beta.$$

Z drugiej strony $|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB|$, czyli $180^\circ - 2\beta = 180^\circ - \alpha$.
Stąd $\alpha = 2\beta$.

Suma miar kątów trójkąta ABC jest równa 180°, więc $2(\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$, czyli $2(2\beta + \beta) + \beta = 180^\circ$. Stąd $7\beta = 180^\circ$.

Zatem $|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - 2\beta = 7\beta - 2\beta = 5\beta = 5 \cdot |\sphericalangle ACD|$. To kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy kąty α i β jak w poprzednim rozwiązaniu.

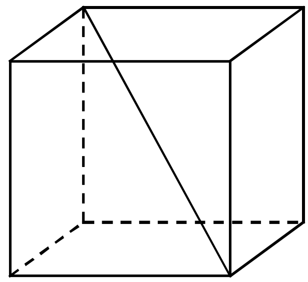
Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC, więc $\alpha = 2\beta$.

Również kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD, więc

$|\sphericalangle ADC| = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta = 4\beta + \beta = 5\beta = 5|\sphericalangle ACD|$, co kończy dowód.

Zadanie 39. (0–2)

Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.



Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

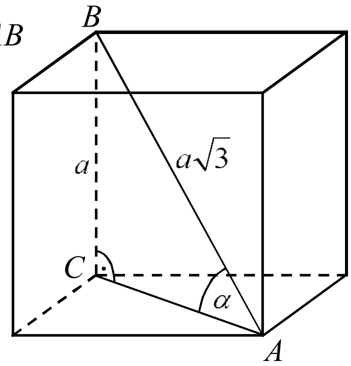
Wymagania szczegółowe

9.2. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów.

Rozwiązanie

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC utworzony przez przekątną AB sześcianu, przekątną AC podstawy sześcianu oraz krawędź BC, jak na rysunku. Kąt ostry α tego trójkąta jest kątem między przekątną sześcianu i płaszczyzną jego podstawy. Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$, więc sinus kąta α jest równy

$$\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Zadanie 40. (0–4)

W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

Wymagania ogólne

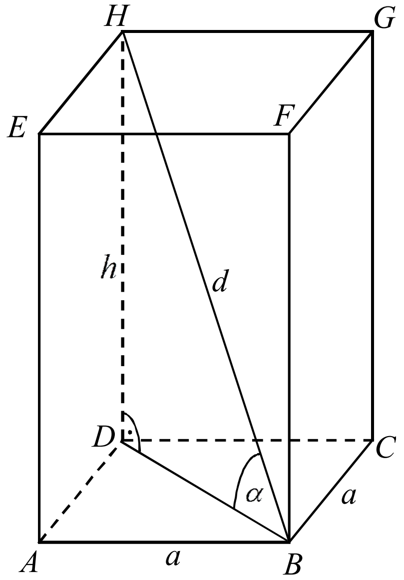
III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Rozwiązanie I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt BDH jest prostokątny, więc

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}, \text{ czyli } \frac{1}{5} = \frac{h}{d}. \text{ Stąd } h = \frac{1}{5}d.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDH otrzymujemy

$$|BD|^2 = d^2 - h^2 = d^2 - \left(\frac{1}{5}d\right)^2 = \frac{24}{25}d^2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest więc równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|BD|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}d^2 = \frac{12}{25}d^2.$$

Zatem objętość tego graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABCD}\cdot h = \frac{12}{25}d^2\cdot\frac{1}{5}d = \frac{12}{125}d^3.$$

Rozwiązanie II

Przyjmijmy oznaczenia jak w rozwiązaniu I.

Trójkąt BDH jest prostokątny, więc $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, czyli $h = d\sin\alpha$. Stąd $h = 0,2\,d$.

W trójkącie BDH mamy również $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$, czyli $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-(0,2)^2} = \sqrt{0,96}\,d$.

Stąd $V = a^2h = \frac{1}{2}\cdot 0,96d^2\cdot 0,2d = 0,096d^3$.

Zadanie 41. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.
Zdający stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

Wymagania szczegółowe

10.2. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Rozwiązanie

Mamy do dyspozycji 5 cyfr parzystych: 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Musimy jednak pamiętać, że 0 nie może być pierwszą cyfrą zapisu dziesiętnego liczby. Dlatego rozważymy dwa przypadki: a) gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta oraz b) gdy pierwsza cyfra jest parzysta.
W przypadku a) pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów; każda pozostała cyfra musi być parzysta i każdą z nich też możemy wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku a) mamy 5^4 możliwości.
W przypadku b) cyfrę parzystą, stojącą na pierwszym miejscu, możemy wybrać na 4 sposoby. Na pozostałych miejscach mamy rozmieścić jedną cyfrę nieparzystą oraz dwie cyfry parzyste. Miejsce dla cyfry nieparzystej możemy wybrać na 3 sposoby; na pozostałych dwóch miejscach umieścimy cyfry parzyste. Cyfrę na każdym z tych trzech miejsc można wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku b) mamy $4\cdot 3\cdot 5^3 = 12\cdot 5^3$ możliwości.
W obu przypadkach łącznie otrzymujemy $5^4 + 12\cdot 5^3 = (5+12)\cdot 5^3 = 17\cdot 125 = 2125$ liczb spełniających warunki zadania.

Zadanie 42. (0–4)

Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

10.3. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie I (model klasyczny)

Oznaczmy przez w_1, w_2 losy wygrywające, a przez p_1, p_2, p_3 losy puste. Wszystkie wyniki losowania dwóch losów bez zwracania możemy przedstawić w tabeli: wynik pierwszego losowania wyznacza wiersz, a wynik drugiego losowania – kolumnę, w przecięciu których leży pole, odpowiadające tej parze losowań. Pola położone na przekątnej odrzucamy, gdyż odpowiadałyby one wylosowaniu dwukrotnie tego samego losu, a to jest niemożliwe, gdyż losujemy bez zwracania.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A zaznaczamy w tabeli krzyżykiem (x).

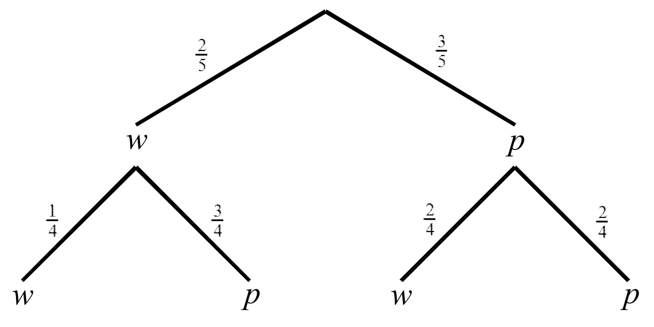
	w_1	w_2	p_1	p_2	p_3
w_1		x	x	x	x
w_2	x		x	x	x
p_1	x	x			
p_2	x	x			
p_3	x	x			

Mamy więc 20 wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 20$, oraz 14 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, czyli $|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

Rozwiązanie II (metoda drzewa)

Losowanie z pojemnika kolejno dwóch losów bez zwracania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie w oznacza wylosowanie losu wygrywającego, a p – losu pustego. Pogrubione gałęzie drzewa odpowiadają zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Na odcinkach drzewa zostały zapisane odpowiednie prawdopodobieństwa.



Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2+6+6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

Zadanie 43. (0–3)

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$.

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.
Zdający prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Wymagania szczegółowe

2.1.Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Rozwiązanie I

Dla dowodu przekształcimy w sposób równoważny tezę.

Ponieważ obie strony danej nierówności $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$ są dodatnie, możemy je podnieść do kwadratu. Otrzymujemy kolejno:

$$\left(\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}\right)^2<\left(2^{26}\right)^2$$

$$2^{50}+1+2\cdot\sqrt{2^{50}+1}\cdot\sqrt{2^{50}-1}+2^{50}-1<2^{52}$$

$$2\cdot 2^{50}+2\sqrt{\left(2^{50}-1\right)\left(2^{50}+1\right)}<2^{52}$$

$$2\sqrt{2^{100}-1}<2^{52}-2^{51}$$

$$\sqrt{2^{100}-1}<2^{50}.$$

Obie strony tej nierówności są także dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy

$$2^{100}-1<2^{100}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a zatem dana w zadaniu nierówność jest również prawdziwa, co kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy $a=\sqrt{2^{50}+1}$, $b=\sqrt{2^{50}-1}$. Zauważmy, że dla dowolnych liczb *a, b*, takich, że $a \neq b$, mamy $(a-b)^2>0$, skąd $a^2+b^2>2ab$. Wobec tego

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab<a^2+b^2+a^2+b^2=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(2^{50}+1+2^{50}-1\right)=2^{52}$.

Stąd $a+b<\sqrt{2^{52}}=2^{26}$, co kończy dowód.

Zadanie 44. (0–5)

W roku 2015 na uroczystości urodzinowej ktoś spytał jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: jeżeli swój wiek sprzed 27 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia. Oblicz, ile lat ma ten jubilat.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.
Zdający dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

Wymagania szczegółowe

3.4. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x obecny wiek jubilata (w latach). Wówczas wiek jubilata sprzed 27 lat jest równy $x-27$, wiek, jaki będzie miał za 15 lat, jest równy $x+15$, a rok jego urodzenia to $2015-x$.

Mamy więc równanie $(x-27)(x+15)=2015-x$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy $x^2-11x-2420=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby $x=55$, $x=-44$.

Stąd wiemy, że jubilat w roku 2015 obchodzi 55. urodziny.