3. Przykłady zadań wraz z rozwiązaniami i opisem sposobu przyznawania punktów

Zadanie I (0–3)

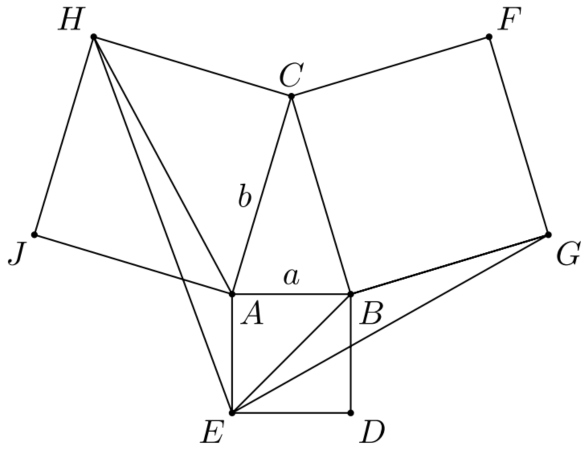
Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na bokach, na zewnątrz trójkąta ABC, zbudowano kwadraty $ABDE$, $BCFG$ i $ACHJ$. Wykaż, że pola trójkątów AHE i BEG są równe.

Rozwiązanie

Omówimy cztery sposoby rozwiązania tego zadania.

Sposób I (trygonometryczny)

Przyjmijmy oznaczenia:



$$|AB| = |AE| = a, \quad |AC| = |BC| = |BG| = b, \quad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha.$$

Rozwiązanie tym sposobem polega na obliczeniu obu szukanych pól za pomocą a, b i α.
Mamy bowiem:

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| \cdot \sin \sphericalangle EAH ,$$

$$P_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BG| \cdot \sin \sphericalangle EBG .$$

Zauważmy, że: $|AE| = a$ oraz $|BG| = b$. Obliczamy długości odcinków AH i BE oraz wyrażamy za pomocą α miary kątów EAH i EBG.

Mamy:

$$|AH| = b\sqrt{2} ,$$

$$|BE| = a\sqrt{2} .$$

Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny i ostrokątny, więc $\alpha > 45^\circ$. Następnie

$$|\sphericalangle EAB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAH| = 90^\circ + \alpha + 45^\circ = 135^\circ + \alpha > 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

a więc kąt wypukły EAH jest równy

$$360^\circ - (135^\circ + \alpha) = 225^\circ - \alpha.$$

Podobnie,

$$|\sphericalangle GBC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle EBA| = 90^\circ + \alpha + 45^\circ = 135^\circ + \alpha > 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

a więc kąt wypukły EBG jest równy

$$360^\circ - (135^\circ + \alpha) = 225^\circ - \alpha.$$

Zatem

$$|\sphericalangle EAH| = 225^\circ - \alpha = |\sphericalangle EBG|.$$

Stąd otrzymujemy

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| \cdot \sin EAH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\sqrt{2} \cdot \sin(225^\circ - \alpha)$$

oraz

$$P_{BEG} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BG| \cdot \sin EBG = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot b \cdot \sin(225^\circ - \alpha).$$

Stąd wynika, że $P_{AHE} = P_{BEG}$, co kończy dowód.

Komentarz

Rozwiązanie składa się z trzech kroków: obliczenie długości boków *AH* i *BE*, wykazanie równości kątów *EAH* i *EBG* (np. przez wyznaczenie obu kątów za pomocą α) oraz zastosowanie wzoru na pole trójkąta.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu wszystkich wielkości potrzebnych we wzorach na pole. Jeden z możliwych błędów zdających, na który należy zwrócić tu uwagę, może polegać na złym zastosowaniu wzoru na pole trójkąta (np. pominięcie współczynnika $\frac{1}{2}$). Pomimo tego błędu zdający otrzymuje poprawny wynik.

W takim przypadku uznajemy rozwiązanie za niedokończone − bezbłędnie zostały pokonane tylko zasadnicze trudności zadania. W tym rozwiązaniu trudno oczekiwać wielu innych rozwiązań błędnych; maturzysta na ogół nie popełni błędu przy obliczaniu przekątnej kwadratu czy dodawaniu miar kątów. Można natomiast spodziewać się rozwiązań częściowych, np. niedokończonych. Niektóre takie rozwiązania omawiamy w uwagach zamieszczonych po schemacie oceniania.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 1 pkt

Obliczenie długości boków AH i BE za pomocą boków AB i AC

lub

wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie długości boków AH i BE za pomocą boków AB i AC oraz wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Wykazanie, że pola obu trójkątów są równe.

Uwagi

Zdający może wykonać obliczenia związane tylko z jednym z dwóch trójkątów i na tym poprzestać. Na przykład w przypadku trójkąta AHE może wykonać następujące obliczenia (przy zachowaniu oznaczeń z powyższego rozwiązania, $|AB| = a, |AC| = b, |\sphericalangle BAC| = \alpha$):

- $|AH| = b\sqrt{2}$;
- $|\sphericalangle EAH| = 225^\circ - \alpha$;
- $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(225^\circ - \alpha)$.

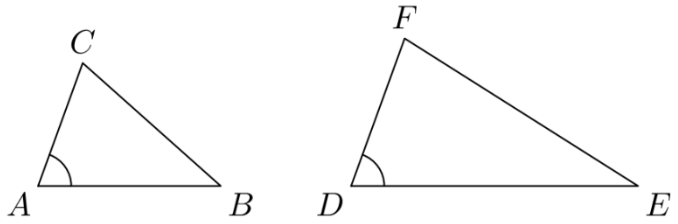
Wówczas:

- jeśli zdający wyznaczy tylko długość boku AH lub miarę kąta EAH, to takie rozwiązanie nie jest jeszcze traktowane jako istotny postęp i przyznajemy za nie 0 punktów,
- jeśli zdający wyznaczy długość boku AH i miarę kąta EAH, to takie rozwiązanie częściowe traktujemy jako „istotny postęp” i przyznajemy za nie 1 punkt,
- jeśli zdający wyznaczy bok AH i zapisze pole w postaci $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot ab\sqrt{2} \cdot \sin \sphericalangle EAH$, nie wyznaczając przy tym kąta EAH za pomocą kąta α, to takie rozwiązanie częściowe traktujemy także jako „istotny postęp” i przyznajemy za nie 1 punkt,
- jeśli zdający wyznaczy bok AH, wyznaczy kąt EAH za pomocą kąta α i zapisze pole trójkąta AHE w postaci $P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot ab\sqrt{2} \cdot \sin(225^\circ - \alpha)$, to traktujemy takie rozwiązanie jako pokonanie zasadniczych trudności zadania i przyznajemy za nie 2 punkty.

Sposób II (stosunek pól)

W tym rozwiązaniu korzystamy z następującej własności trójkątów:

Dane są dwa trójkąty ABC i DEF takie, że $\sphericalangle A = \sphericalangle D$



Wówczas

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|}.$$

Powyższa proporcja wyraża w sposób czysto geometryczny tę samą treść co wzór trygonometryczny na pole trójkąta. Mianowicie mamy:

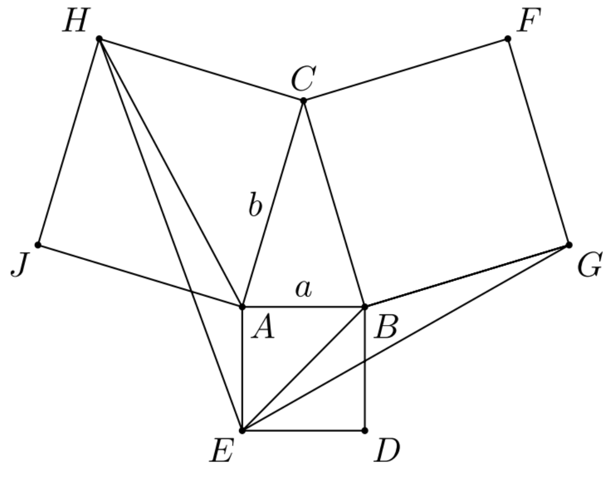
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A$$

oraz

$$P_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin D.$$

Sformułowanie geometryczne pozwala przeprowadzić dowód bez odwoływania się do trygonometrii.

Tak jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.



Następnie korzystamy ze wspomnianej wyższej własności trójkątów:

$$\frac{P_{AHE}}{P_{BEG}} = \frac{|AE| \cdot |AH|}{|BE| \cdot |BG|} = \frac{|AE| \cdot |AC| \cdot \sqrt{2}}{|AB| \cdot \sqrt{2} \cdot |BG|} = \frac{|AE|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|BG|} = 1,$$

co dowodzi, że $P_{AHE} = P_{BEG}$.

Przy zachowaniu oznaczeń z poprzedniego sposobu rozwiązania, możemy to rozwiązanie zapisać w sposób następujący. Przyjmujemy $|AB| = a$ i $|AC| = b$. Wówczas $|AH| = b\sqrt{2}$ oraz $|EB| = a\sqrt{2}$. Tak jak w sposobie I, pokazujemy, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$. Korzystając z twierdzenia o stosunku pól, otrzymujemy

$$\frac{P_{AHE}}{P_{BEG}} = \frac{|AE| \cdot |AH|}{|BE| \cdot |BG|} = \frac{a \cdot b\sqrt{2}}{a \cdot b\sqrt{2}} = 1,$$

co dowodzi, że $P_{AHE} = P_{BEG}$.

Komentarz

W tym sposobie rozwiązania podstawowym zadaniem jest – tak jak w sposobie pierwszym – obliczenie długości odcinków *AH* i *BE* oraz wykazanie równości kątów *EAH* i *EBG*. Dlatego schemat oceniania może być taki sam, jak w sposobie I. Uwagi dotyczące rozwiązań niekompletnych są takie same jak w przypadku sposobu I.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 1 pkt

Obliczenie długości boków *AH* i *BE* za pomocą boków *AB* i *AC*

lub

wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie długości boków *AH* i *BE* za pomocą boków *AB* i *AC* oraz wykazanie, że $|\sphericalangle EAH| = |\sphericalangle EBG|$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Wykorzystanie wzoru trygonometrycznego do obliczenia pól obu trójkątów i wykazania, że te pola są równe.

Uwaga

Jeśli zdający wykonuje obliczenia tylko w jednym z rozważanych trójkątów, to w istocie rozwiązuje zadanie sposobem pierwszym i możemy zastosować rozstrzygnięcia zawarte w uwadze do schematu oceniania w sposobie I.

Sposób III (geometria analityczna)

Rozwiązanie zadania sposobem analitycznym składa się z trzech kroków. Po pierwsze, w wygodny sposób umieszczamy rozważane figury geometryczne w układzie współrzędnych – lub równoważnie – do istniejących figur dobieramy układ współrzędnych. Po drugie, w przyjętym układzie współrzędnych obliczamy współrzędne potrzebnych punktów. Wreszcie, za pomocą obliczonych współrzędnych, obliczamy wielkości, o które chodzi w zadaniu.

W naszym przypadku te kroki sprowadzają się do:

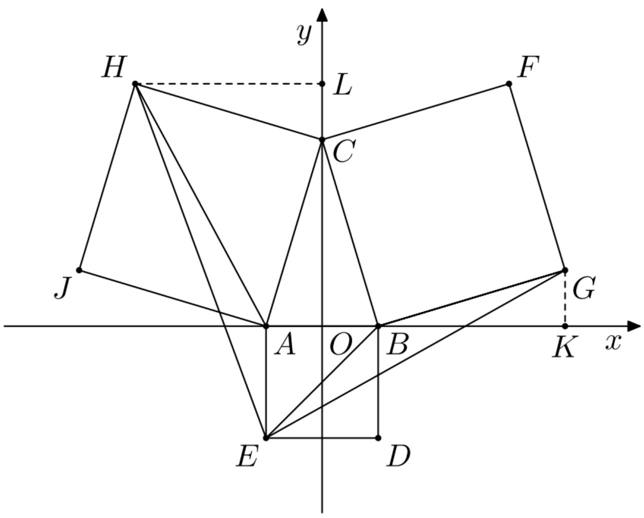
- wyboru układu współrzędnych;
- obliczenia współrzędnych wierzchołków trójkątów *AHE* i *BEG*;
- obliczenia pól trójkątów *AHE* i *BEG*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na obliczeniu współrzędnych wierzchołków trójkątów *AHE* i *BGE*.

Popatrzmy teraz, w jaki sposób można przeprowadzić takie rozwiązanie. Najpierw musimy wybrać układ współrzędnych. Można to zrobić na wiele sposobów; trudności obliczeniowe zadania będą zależały od sposobu wyboru układu. Jednym z najwygodniejszych sposobów jest wybór układu współrzędnych uwzględniający naturalne symetrie figur występujących w zadaniu. W naszym przypadku wybieramy układ tak, by oś *Oy* zawierała oś symetrii trójkąta równoramiennego *ABC*. Umieszczamy zatem trójkąt *ABC* w układzie współrzędnych tak, że

$$A=(-a,0),\quad B=(a,0),\quad C=(0,h),$$

gdzie $a>0$ i $h>0$. Ponieważ trójkąt *ABC* jest ostrokątny, więc $|\sphericalangle BAC|>45^\circ$, skąd wynika, że $a<h$.



Wyznaczamy teraz współrzędne punktów *E*, *G* i *H*. Oczywiście bok *AB* ma długość $2a$, skąd wynika, że $E=(-a,-2a)$. Współrzędne punktów *G* i *H* możemy wyznaczyć wieloma sposobami. Pokażemy dokładnie dwa z nich i zasygnalizujemy trzeci sposób, znacznie bardziej pracochłonny.

- Korzystamy z tego, że jeśli obrócimy wektor $[x,y]$ o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to otrzymamy wektor $[y,-x]$. (Tę własność można łatwo odczytać z rysunku.) W naszym zadaniu mamy $\overrightarrow{CA}=[-a,-h]$, skąd $\overrightarrow{CH}=[-h,a]$. Stąd dostajemy $H=C+\overrightarrow{CH}=(0,h)+[-h,a]=(-h,a+h)$.

  W podobny sposób:

$$\overrightarrow{BC}=[-a,h],\quad \overrightarrow{BG}=[h,a],\quad G=(a+h,a).$$

- Niech *K* będzie rzutem punktu *G* na oś *Ox* i niech *L* będzie rzutem punktu *H* na oś *Oy*. Wówczas trójkąty *CLH* i *GKB* są przystające do trójkąta *AOC*, skąd

$$|CL|=|GK|=a,\quad |HL|=|BK|=h.$$

  To daje współrzędne punktów $G=(a+b,a)$ i $H=(-h,a+h)$.

- Wyznaczamy równanie prostej *AC*: $y=\frac{h}{a}x+h$ oraz równanie prostej prostopadłej do niej, przechodzącej przez punkt *C*: $y=-\frac{a}{h}x+h$. Następnie na tej prostej prostopadłej znajdujemy oba punkty odległe od punktu *C* o długość odcinka *AC*; jest to najbardziej pracochłonna część zadania. Wreszcie wybieramy ten z otrzymanych dwóch punktów, który ma ujemną współrzędną *x*. W podobny sposób możemy wyznaczyć współrzędne punktu *G*.

Następnie obliczamy pola trójkątów *AHE* i *BEG*. Możemy skorzystać ze wzoru znajdującego się w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych*. Jeśli wierzchołki trójkąta *KLM* mają współrzędne

$$K=(x_K,y_K),\quad L=(x_L,y_L),\quad M=(x_M,y_M),$$

to pole wyraża się wzorem

$$P_{KLM}=\frac{1}{2}\cdot\left|(x_L-x_K)(y_M-y_K)-(y_L-y_K)(x_M-x_K)\right|.$$

W naszym przypadku mamy

$$E=(-a,-2a),\quad A=(-a,0),\quad H=(-h,a+h),$$

skąd dostajemy

$$P_{AHE}=\frac{1}{2}\cdot\left|(-a+a)(a+h+2a)-(0+2a)(-h+a)\right|=\left|-a(a-h)\right|=a(h-a).$$

Podobnie,

$$E=(-a,-2a),\quad B=(a,0),\quad G=(a+h,a),$$

skąd dostajemy

$$P_{BEG}=\frac{1}{2}\cdot\left|(a+a)(a+2a)-(0+2a)(a+h+a)\right|=\frac{1}{2}\left|6a^2-4a^2-2ah\right|=a(h-a).$$

To kończy dowód.

Zauważmy też, że pole trójkąta *AHE* można obliczyć prościej: podstawa *AE* ma długość $2a$, wysokość (niezaznaczona na rysunku) ma długość $h-a$.

Uwaga

Pola trójkątów można też obliczyć inaczej. Można np. wyznaczyć długość jednego boku, równanie prostej zawierającej ten bok oraz odległość trzeciego wierzchołka od tej prostej (odpowiednie wzory także znajdują się w tablicach).

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 1 pkt

Umieszczenie trójkąta ABC w układzie współrzędnych i podanie współrzędnych jego wierzchołków.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów E, G i H.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

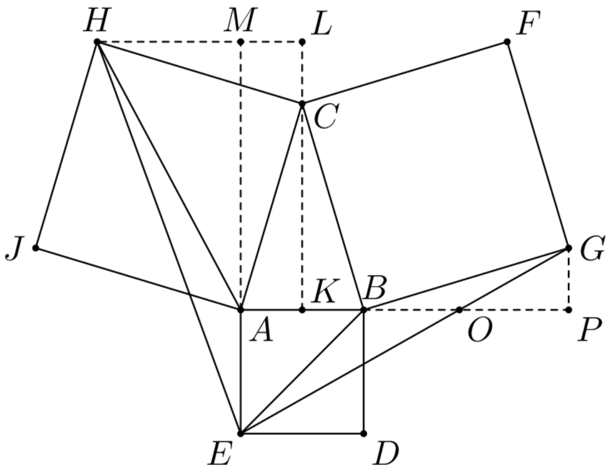
Obliczenie pól trójkątów AHE i BEG np. za pomocą wzorów znajdujących się w tablicach i zauważenie, że te pola są równe.

Uwaga

Zdający rozwiązujący zadanie tym sposobem mogą popełnić bardzo wiele różnych błędów: na przykład źle wyznaczyć współrzędne punktów E, G i H lub źle obliczyć pola trójkątów. Mogą wreszcie wybrać takie metody obliczania pól, że nie będzie oczywiste, czy otrzymane wyniki są równe (może to wymagać odpowiednich przekształceń). Niezależnie od charakteru i przyczyny błędu, schemat oceniania wyraźnie wskazuje, jaką liczbę punktów należy przyznać zdającemu. Maksymalną liczbę punktów zdający otrzymuje za bezbłędnie wykonane kroki. Może się jednak zdarzyć, że zdający popełni nieistotny błąd rachunkowy przy wyznaczaniu współrzędnych któregoś punktu i w ten sposób uzyska błędne wyniki w ostatnim kroku. Jeśli jednak metoda obliczania pól trójkątów jest poprawna, zostały dokonane poprawne podstawienia do wzorów, zgodne z otrzymanymi wynikami obliczeń oraz obliczenia w tym kroku zostały wykonane poprawnie, to zdający otrzymuje 2 punkty (jest to sytuacja, w której zdający doprowadza rozwiązanie do końca, popełniając nieistotny błąd rachunkowy podczas pokonywania zasadniczych trudności).

Sposób IV (bezpośrednie obliczenie pól)

Prowadzimy w trójkącie *ABC* wysokość *CK*. Następnie niech punkt *L* będzie rzutem prostokątnym punktu *H* na prostą *KC* i niech punkt *P* będzie rzutem prostokątnym punktu *G* na prostą *AB*.



Wówczas nietrudno zauważyć, że trójkąty *CLH* i *BPG* są przystające do trójkątów *AKC* i *BKC*. Mianowicie $|CH| = |AC| = |BC| = |BG|$. Jeśli następnie

$\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$,

to $|\sphericalangle ACK| = 90° - \alpha$, $|\sphericalangle HCL| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CHL| = 90° - \alpha$. Podobnie, $|\sphericalangle BCK| = \alpha$, $|\sphericalangle GBP| = 90° - \alpha$ oraz $|\sphericalangle BGP| = \alpha$. Wspomniane przystawania trójkątów wynikają teraz z cechy przystawania *kbk*.

Przyjmijmy oznaczenia:

$a = |AK| = |BK|, \quad h = |CK|$.

Wówczas $|HL| = |BP| = h$ oraz $|CL| = |GP| = a$. Ponadto $a < h$. Niech następnie punkt *M* będzie rzutem prostokątnym punktu *A* na prostą *HL*. Ponieważ $a < h$, więc punkt *M* leży wewnątrz odcinka *HL*. Możemy już obliczyć pole trójkąta *EAH*. Mianowicie

$$P_{AHE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |HM| = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (h - a) = a(h - a).$$

Następnie niech punkt *O* będzie punktem przecięcia prostych *EG* i *AP*. Z podobieństwa trójkątów *EAO* i *GPO* wynika, że

$$\frac{|AO|}{|PO|} = \frac{|AE|}{|PG|} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Zatem

$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot |AP| = \frac{2}{3} \cdot (2a + h),$$

skąd wynika, że

$$|BO| = |AO| - |AB| = \frac{2}{3} \cdot (2a + h) - 2a = \frac{2}{3} \cdot (h - a).$$

Wreszcie

$$P_{EBG} = P_{EBO} + P_{GBO} = \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |AE| + \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |GP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (h - a) \cdot (2a + a) = a(h - a).$$

To kończy dowód.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 1 pkt

Dorysowanie trójkątów *CLH* i *GPB* oraz zauważenie, że są one przystające do trójkąta *AKC* (lub *BKC*). Nie wymagamy w tym miejscu od zdającego pełnego dowodu przystawania – przyjmujemy, że uzasadnienie przystawania jest oczywiste.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie pola jednego z trójkątów *AHE* i *BEG*.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Obliczenie pól obu trójkątów i stwierdzenie, że są one równe.

Uwaga

W takim sposobie rozwiązania zadania jest mało prawdopodobne, by zdający popełnił istotny błąd. Mogą się natomiast zdarzyć rozwiązania niedokończone. Mogą też wystąpić różne inne próby rozwiązania polegające na dorysowywaniu do rysunku różnych odcinków. Jeśli nie jest wyraźnie widoczny cel takich poszukiwań i nie został on wyraźnie wskazany w rozwiązaniu, to zdający otrzymuje 0 punktów.

Zadanie II (0–5)

Ile jest nieparzystych liczb naturalnych trzycyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest dziewiątką?

Rozwiązanie

Omówimy 6 sposobów rozwiązania tego zadania.

Sposób I (umieszczenie dziewiątki)

W tym sposobie rozwiązania pokażemy najpierw rozumowanie błędne polegające na policzeniu kilkakrotnym tych samych liczb. Wskazany błąd jest niezwykle często popełniany przez zdających rozwiązujących to zadanie; można go jednak dość łatwo naprawić. Wystarczy odjąć liczbę tych liczb, które były policzone dwukrotnie i odjąć podwojoną liczbę tych liczb, które były policzone trzykrotnie. Obliczenie, ile należy odjąć, jest dość łatwe. Problem polega jednak na tym, że zdający popełniający ten błąd nie zdają sobie sprawy z tego, na czym on polega – nie dostrzegają, że niektóre liczby policzyli wielokrotnie.

A oto rozwiązanie. Wiemy, że jedną z cyfr jest 9; możemy ją umieścić na jednym z trzech miejsc: pierwszym, drugim lub trzecim.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 10 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 50 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 45 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na drugim dowolną z 10 cyfr. Łącznie daje to w tym przypadku 90 liczb.

W sumie daje to $50+45+90=185$ liczb.

Które liczby zostały policzone wielokrotnie? Popatrzmy na przykład. Przypuśćmy, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na pierwszym miejscu, a na pozostałych miejscach umieściliśmy kolejno cyfry 5 i 9. Otrzymaliśmy liczbę 959. Przypuśćmy teraz, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na trzecim miejscu, a następnie umieściliśmy na pierwszych dwóch miejscach kolejno cyfry 9 i 5. Znów otrzymaliśmy liczbę 959. Ta liczba została więc w powyższym sposobie zliczania policzona dwukrotnie. Zobaczmy teraz, w jaki sposób można poprawić to rozwiązanie błędne.

Dostaliśmy wynik 185. Zauważmy jednak, że liczby z dwiema dziewiątkami były policzone po dwa razy, a liczba 999 nawet trzy razy. Zliczamy teraz liczby z dwiema dziewiątkami.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8).
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8).

W sumie okazuje się, że mamy 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Od otrzymanego wyniku musimy zatem odjąć 21. Następnie mamy jedną liczbę (mianowicie 999) z trzema dziewiątkami. Policzyliśmy ją trzykrotnie, więc od otrzymanego wyniku musimy jeszcze odjąć 2. Zatem liczb, które nas interesują, jest $185-21-2=162$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Pokazane na początku rozwiązanie błędne zawiera istotne elementy rozumowania prawidłowego, więc powinno być ocenione jako rozwiązanie częściowe. Uznajemy je za „istotny postęp".

Postęp niewielki .... 1 pkt

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb, lub obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb.

Istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy, że przy umieszczeniu dziewiątki na pierwszym miejscu otrzyma 50 liczb, przy umieszczeniu dziewiątki na drugim miejscu otrzyma 45 liczb i przy umieszczeniu dziewiątki na trzecim miejscu otrzyma 90 liczb. Nie wymagamy, by w tej kategorii otrzymał wynik łączny 185 liczb.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający otrzyma wynik 185 liczb, następnie zauważy, że pewne liczby policzono wielokrotnie oraz obliczy, że 21 liczb policzono dwukrotnie. Za samo zauważenie, że pewne liczby zostały policzone wielokrotnie, bez podania prawidłowej ich liczby (na przykład w wyniku błędnego obliczenia), zdający otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania, zauważy, że liczba 999 była policzona trzykrotnie i obliczy poprawnie liczbę wszystkich rozważanych liczb:

$$50+45+90-21-2=162.$$

Sposób II (pierwsza dziewiątka)

Wszystkie interesujące nas liczby dzielimy na trzy grupy i policzymy liczby w każdej grupie.

- Do pierwszej grupy zaliczamy liczby zaczynające się dziewiątką.
- Do drugiej grupy zaliczamy liczby, w których pierwsza dziewiątka znajduje się na drugim miejscu.
- Do trzeciej grupy zaliczamy liczby, w których pierwsza dziewiątka znajduje się na trzecim miejscu.

Teraz zliczamy liczby znajdujące się w tych grupach.

- W pierwszej grupie znajduje się 50 liczb: na pierwszym miejscu jest dziewiątka, na drugim dowolna z 10 cyfr i na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W drugiej grupie znajduje się 40 liczb: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (nie może być 0 i 9), na drugim miejscu jest dziewiątka i na trzecim jedna z pięciu cyfr nieparzystych.
- W trzeciej grupie znajdują się 72 liczby: na pierwszym miejscu znajduje się jedna z 8 cyfr (jak wyżej), na drugim jedna z 9 cyfr (nie może być 9) i na trzecim miejscu znajduje się dziewiątka.

Łącznie mamy zatem 162 liczby.

Komentarz

Zdający rozwiązujący zadanie tą metodą zdaje sobie prawdopodobnie sprawę z niebezpieczeństwa policzenia tych samych liczb wielokrotnie i prawdopodobnie nie popełni większych błędów. Możliwe są natomiast drobne błędy rachunkowe.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Postęp niewielki .... 1 pkt

Zdający prawidłowo zdefiniuje trzy grupy liczb.

Istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy, ile jest liczb w co najmniej jednej z tych trzech grup.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający prawidłowo obliczy, ile jest liczb w każdej z tych trzech grup. Za prawidłowy wynik w dwóch grupach zdający otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i obliczy poprawnie liczbę wszystkich rozważanych liczb:

$$50+40+72=162.$$

Sposób III (liczba dziewiątek)

Najpierw policzymy liczby, w których jest tylko jedna cyfra 9. Tym razem zastosujemy metodę znaną z powyższego błędnego rozwiązania, jednak użycie tej metody będzie poprawne, gdyż jest tylko jedna cyfra 9. Możemy umieścić ją na jednym z trzech miejsc.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 36 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 32 liczby.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na drugim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku 72 liczby.

W sumie daje to $36+32+72=140$ liczb.

Teraz policzymy liczby, w których są dwie cyfry 9.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr.

W sumie daje to $4+8+9=21$ liczb.

Wreszcie mamy jedną liczbę z trzema dziewiątkami: 999.

Mamy więc $140+21+1=162$ liczby.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką lub obliczenie, że istnieje 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Każde z tych obliczeń wymaga rozpatrzenia trzech przypadków w zależności od położenia dziewiątek. Zdający otrzymuje **1 punkt**, jeśli prawidłowo rozpatrzy dwa z tych trzech przypadków i na tym poprzestanie lub popełni błąd w trzecim obliczeniu lub w obliczeniu sumy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Obliczenie, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką i istnieje 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Jeśli zdający poprawnie wykona jedno z tych obliczeń, a w drugim popełni błąd taki jak opisany w poprzedniej kategorii, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Podanie pełnej odpowiedzi. Jeśli zdający poprawnie obliczy, że istnieje 140 liczb z jedną dziewiątką lub 21 liczb z dwiema dziewiątkami, drugie z tych obliczeń doprowadzi do końca z błędem w jednym z trzech przypadków, następnie zauważy, że istnieje dokładnie jedna liczba z trzema dziewiątkami i poprawnie doda otrzymane liczby – uzyskując w efekcie wynik błędny – otrzymuje **4 punkty**.

Sposób IV (uzupełnianie)

Najpierw policzymy wszystkie liczby trzycyfrowe nieparzyste. Wszystkich liczb trzycyfrowych jest 900; co druga jest nieparzysta. Istnieje zatem 450 liczb trzycyfrowych nieparzystych. Możemy również rozumować następująco: na pierwszym miejscu można umieścić jedną z dziewięciu cyfr, na drugim jedną z dziesięciu cyfr, a na trzecim jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Łącznie mamy zatem $9\cdot 10\cdot 5=450$ liczb. Teraz policzymy wszystkie liczby nieparzyste, w których nie występuje cyfra 9. Tym razem na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8), na drugim jedną z dziewięciu cyfr (od 0 do 8), a na trzecim jedną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7; łącznie mamy zatem $8\cdot 9\cdot 4=288$ liczb. Liczby, o które chodzi w zadaniu, to oczywiście liczby **należące** do pierwszej grupy (wszystkie liczby nieparzyste) i **nienależące** do drugiej grupy (w której są liczby nieparzyste **bez** dziewiątki). Stąd wynika, że liczb, o które chodzi w zadaniu, jest $450-288=162$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Postęp niewielki .... 1 pkt

Obliczenie liczby liczb trzycyfrowych: 900.

Istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie liczby nieparzystych liczb trzycyfrowych: 450. Jeśli zdający oblicza tę liczbę metodą rozmieszczania cyfr i popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli zdający stwierdzi, że istnieje 899 liczb trzycyfrowych i jako liczbę nieparzystych liczb trzycyfrowych poda liczbę 449 lub 450, to otrzymuje **1 punkt**.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Obliczenie liczby nieparzystych liczb trzycyfrowych niezawierających cyfry 9: jest 288 liczb. Jeżeli zdający obliczy poprawnie liczbę nieparzystych liczb trzycyfrowych niezawierających cyfry 9, ale popełni błąd opisany w kategorii „istotny postęp"”, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający otrzyma prawidłowy wynik (162 liczby), nie popełniając przy tym błędu (np. opisanego w kategorii „istotny postęp”). W przypadku gdy popełni taki błąd, otrzymuje **4 punkty**.

Sposób V (zasada włączeń i wyłączeń)

Niektórzy zdający mogą zastosować w rozwiązaniu zasadę włączeń i wyłączeń, choć nie ma jej w podstawie programowej – mogli ją na przykład odkryć samodzielnie jako regułę niemal oczywistą intuicyjnie.

Niech A będzie zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na pierwszym miejscu, B zbiorem liczb nieparzystych z dziewiątką na drugim miejscu i wreszcie C zbiorem nieparzystych z dziewiątką na trzecim miejscu. Zbiorem liczb, które nas interesują, jest oczywiście zbiór $A \cup B \cup C$. Nietrudno teraz zauważyć, że:

$$|A| = 50,\ |B| = 45,\ |C| = 90$$

$$|A \cap B| = 5,\ |A \cap C| = 10,\ |B \cap C| = 9$$

$$|A \cap B \cap C| = 1$$

Z zasady włączeń i wyłączeń dostajemy

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 50 + 45 + 90 - 5 - 10 - 9 + 1 = 162.$$

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Postęp niewielki .... 1 pkt

Zdający zdefiniuje zbiory A, B i C i zauważy, że ma obliczyć $|A \cup B \cup C|$.

Postęp większy .... 2 pkt

Zdający obliczy $|A|$, $|B|$ i $|C|$.

Istotny postęp .... 3 pkt

Zdający obliczy $|A \cap B|$, $|B \cap C|$, $|A \cap C|$ i $|A \cap B \cap C|$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i podstawi do niego prawidłowe dane. Jeśli zdający zdefiniuje zbiory A, B i C, poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń i poprawnie obliczy co najmniej $|A|$, $|B|$ i $|C|$ oraz popełni błędy w pozostałych obliczeniach, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Uwaga

Jeśli zdający tylko zdefiniuje zbiory A, B i C oraz poprawnie zapisze wzór włączeń i wyłączeń, to otrzymuje **2 punkty**.

Sposób VI (wypisywanie liczb w kolejności rosnącej)

Ten sposób rozwiązania, z pozoru nierozsądny, może jednak naprowadzić zdającego na stosunkowo proste rozwiązanie. Oczywiście wypisywanie wszystkich liczb spełniających warunki zadania nie może być dokonywane bez zastanowienia. Nie chodzi zatem o wypisanie w kolejności rosnącej wszystkich liczb trzycyfrowych (jest ich 900), wykreślenie liczb parzystych oraz liczb, w których nie występuje dziewiątka i zliczeniu liczb niewykreślonych. Jeśli zdający nie popełni błędu, powinien otrzymać 162 liczby. Oczywiście takie rozwiązanie, wykonane bezbłędnie, powinno być ocenione na 5 punktów.

Zdający może również wypisywać w kolejności rosnącej tylko właściwe liczby. Oto poprawny wynik:

109	119	129	139	149	159	169	179	189
191	193	195	197	199				
209	219	229	139	249	259	269	279	289
291	293	295	297	299				
309	319	329	339	349	359	369	379	389
391	393	395	397	399				
409	419	429	439	449	459	469	479	489
491	493	495	497	499				
509	519	529	539	549	559	569	579	589
591	593	595	597	599				
609	619	629	639	649	659	669	679	689
691	693	695	697	699				
709	719	729	739	749	759	769	779	789
791	793	795	797	799				
809	819	829	839	849	859	869	879	889
891	893	895	897	899				
901	903	905	907	909				
911	913	915	917	919				
921	923	925	927	929				
931	933	935	937	939				
941	943	945	947	949				
951	953	955	957	959				
961	963	965	967	969				
971	973	975	977	979				
981	983	985	987	989				
991	993	995	997	999				

W pierwszych 16 wierszach mamy ośmiokrotnie wiersz z 9 liczbami i wiersz z 5 liczbami. W następnych 10 wierszach mamy po 5 liczb. Łącznie zatem wypisano

$$8\cdot(9+5)+10\cdot 5=162$$

liczby.

W trakcie wypisywania możemy zauważyć regułę i ją opisać: najpierw występują liczby zaczynające się od cyfry różnej od 9 (mamy tu 8 możliwości). Dla każdej takiej pierwszej cyfry c mamy 9 liczb postaci

$$c09,\quad c19,\quad c29,\quad c39,\quad c49,\quad c59,\quad c69,\quad c79,\quad c89,$$

po których przychodzi 5 liczb postaci

$$c91,\quad c93,\quad c95,\quad c97,\quad c99.$$

Dla każdej cyfry $c=1,2,3,4,5,6,7,8$ wypiszemy w ten sposób 14 liczb. To łącznie daje $8\cdot 14=112$ liczb. Następnie wypisujemy liczby zaczynające się od dziewiątki. Warunek mówiący, że w zapisie liczby występuje dziewiątka, jest teraz spełniony; na drugim miejscu może zatem wystąpić dowolna z 10 cyfr, a na trzecim dowolna z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 2, 5, 7, 9. To daje łącznie 50 liczb, a więc ostatecznie dostajemy 162 liczby.

Komentarz

Zdający mogą próbować wypisywać liczby w różnej kolejności, stosując różne strategie. W przypadku gdy zdający wyłącznie wypisuje liczby i podaje ostateczną odpowiedź, uznajemy tylko rozwiązania całkowicie bezbłędne: odpowiedź 162 popartą poprawną listą liczb. Za takie rozwiązanie zdający powinien otrzymać **5 punktów**. Za rozwiązania polegające na wypisywaniu liczb, niezawierające wyjaśnień i prowadzące do błędnej odpowiedzi zdający powinien otrzymać **0 punktów**. Jeśli zdający poda odpowiedź poprawną (162 liczby) bez jakiegokolwiek uzasadnienia, to za takie rozwiązanie można otrzymać co najwyżej **1 punkt**. Jeśli natomiast poprawna odpowiedź jest poparta nieprawidłową listą liczb, to zdający otrzymuje **0 punktów**.

Metoda polegająca na wypisywaniu liczb może – jak widzieliśmy wyżej – prowadzić do trafnych uogólnień. Pokonanie zasadniczych trudności zadania polega na dokonaniu dwóch obserwacji: dla każdej cyfry różnej od 0 i 9 mamy 14 interesujących nas liczb zaczynających się tą cyfrą oraz dla cyfry 9 mamy 50 liczb zaczynających się tą cyfrą.

Schemat oceniania VI sposobu rozwiązania

Jeśli zdający opisze regułę prowadzącą do wypisania poprawnej listy, to przyznajemy punkty według następującego schematu:

Istotny postęp .... 2 pkt

- Zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest różna od 9, to mamy 14 liczb

lub

- zdający zauważy, że jeśli pierwsza cyfra jest dziewiątką, to mamy 50 liczb.

Uznajemy w tej kategorii rozwiązania, w których zdający wypisze w wyraźnie wyodrębnionej grupie 14 liczb zaczynających się np. od jedynki i wskaże (np. za pomocą trzech kropek), że ta sama reguła obowiązuje dla pozostałych pierwszych cyfr różnych od dziewiątki. Uznajemy także rozwiązania, w których zdający wyłącznie obliczy, że jest 50 liczb nieparzystych zaczynających się od dziewiątki.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 4 pkt

Zdający zauważy obie reguły opisane w poprzedniej kategorii.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający pokona zasadnicze trudności zadania i ponadto poprawnie obliczy liczbę wszystkich rozważanych liczb: $8\cdot 14+50=162$.

Uwaga

W tej metodzie rozwiązania zdający może popełnić wiele błędów. Na przykład może, wypisując liczby zaczynające się cyfrą 1, nie zauważyć, że liczba 199 pojawia się dwukrotnie: raz w ciągu 10 liczb

109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199

i drugi raz w ciągu liczb

191, 193, 195, 197, 199.

Jeśli zdający wyłącznie zauważy, że istnieje 15 liczb zaczynających się od cyfry różnej od 9, powinien otrzymać 1 punkt. Inny błąd może polegać na złym obliczeniu, ile jest liczb zaczynających się od dziewiątki. Zdający może na przykład zapomnieć, że rozważamy wyłącznie liczby nieparzyste i przyjmie, że istnieje 100 takich liczb. Za taką obserwację też powinien otrzymać 1 punkt. Te błędy mogą prowadzić do następujących błędnych odpowiedzi:

$$8\cdot 15+50=170$$

oraz

$$8\cdot 14+100=192.$$

Za doprowadzenie rozwiązania do końca z jednym z tych dwóch błędów zdający powinien otrzymać 4 punkty. Oba opisane błędy prowadzą do odpowiedzi

$$8\cdot 15+100=220,$$

za którą zdający powinien otrzymać 3 punkty.

Zadanie III (0–3)

Wykaż, że jeżeli $x > 0$, to $x^2 + \frac{16}{x} \geq 12$.

Rozwiązanie

Omówimy 4 sposoby rozwiązania tego zadania.

Sposób I (pierwsza pochodna)

Definiujemy funkcję f określoną wzorem $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ dla $x \in (0, +\infty)$.

Funkcja f jest różniczkowalna, obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

Ponieważ $x^2 + 2x + 4 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to

$f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$,

$f'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (0, 2)$,

$f'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (2, +\infty)$.

Wynika stąd, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 2\rangle$ i jest rosnąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$, czyli dla $x = 2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczamy $f(2) = 4 + \frac{16}{2} = 12$, stąd wynika, że $f(x) \geq 12$ co należało udowodnić.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Określenie funkcji $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ dla $x \in (0, +\infty)$ i obliczenie jej pochodnej

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Obliczenie miejsca zerowego pochodnej i wyznaczenie przedziałów, w których pochodna ma „stały znak”:

$f'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$,

$f'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(0,2)$,

$f'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(2,+\infty)$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Stwierdzenie, że funkcja f jest malejąca w przedziale $\left(0,2\right\rangle$ i jest rosnąca w przedziale $\left\langle 2,+\infty\right)$, czyli dla $x=2$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Obliczenie $f(2)=12$ i zapisanie wniosku: $f(x)\geq 12$, co należało udowodnić.

Uwagi

1. Zdający po obliczeniu, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$, może uzasadnić tezę korzystając z drugiej pochodnej funkcji f.
2. Jeżeli zdający obliczy, że $f'(x)=0$ tylko dla $x=2$ i stąd już wywnioskuje fakt: $f(x)\geq f(2)=12$, to za rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

Komentarz

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który nie zmieni miejsc zerowych pochodnej i dalej doprowadzi rozwiązanie do końca, to może otrzymać za całe zadanie maksymalnie **2 punkty**.

Przykłady tego typu błędów:

$$f'(x)=\frac{2x^3-16}{x},$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2+x+4)}{x^2},$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2+2x+2)}{x^2}.$$

Jeżeli w obliczaniu pochodnej zdający popełni błąd, który zmienia miejsca zerowe pochodnej, to otrzymuje za zadanie **0 punktów**.

Sposób II (przekształcenia równoważne)

Zapisujemy nierówność $x^2 + \frac{16}{x} \geq 12$ i przekształcamy ją równoważnie:

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{16}{x} + 4x - 16 \geq 0,$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{4}{x}\left(x^2 - 4x + 4\right) \geq 0,$$

$$(x-2)^2 + \frac{4}{x}(x-2)^2 \geq 0,$$

$$(x-2)^2\left(1 + \frac{4}{x}\right) \geq 0.$$

Jeżeli $x > 0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, jako iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego, co należało udowodnić.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zapisanie nierówności w postaci $x^2 - 4x + 4 + \frac{16}{x} + 4x - 16 \geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2 + \frac{4}{x}(x-2)^2 \geq 0$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

- Zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2\left(1 + \frac{4}{x}\right) \geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x > 0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo iloczyn czynników nieujemnego i dodatniego jest nieujemny, co kończy dowód

albo

- zapisanie nierówności w postaci $(x-2)^2 + \frac{4}{x}(x-2)^2 \geq 0$ i stwierdzenie, że jeżeli $x > 0$, to lewa strona nierówności jest nieujemna, bo suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, co kończy dowód.

Sposób III (funkcja wymierna)

Zapisujemy nierówność $x^2 + \frac{16}{x} \geq 12$ w postaci równoważnej $\frac{x^3 - 12x + 16}{x} \geq 0$.

Przy założeniu $x > 0$, nierówność ta jest równoważna nierówności $x^3 - 12x + 16 \geq 0$ dla $x > 0$

Określamy wielomian $W(x) = x^3 - 12x + 16$.

Stwierdzamy, że jednym z miejsc zerowych wielomianu W jest liczba 2. Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $x - 2$ otrzymujemy iloraz $x^2 + 2x - 8$, który zapisujemy w postaci iloczynowej $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$.

Stąd $W(x) = x^3 - 12x + 16 = (x-2)\left(x^2 + 2x - 8\right) = (x-2)^2(x+4)$.

Stwierdzamy, że jeżeli $x > 0$, to $W(x) \geq 0$ jako iloczyn czynników nieujemnych, co kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Stwierdzenie, że przy założeniu $x > 0$, nierówność jest równoważna nierówności $x^3 - 12x + 16 \geq 0$ dla $x > 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Zapisanie wielomianu W w postaci iloczynowej

$$W(x) = x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4).$$

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Uzasadnienie, że jeżeli $x > 0$, to $W(x) \geq 0$, co kończy dowód.

Sposób IV (zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej)

Niektórzy zdający mogą odwołać się do tej nierówności, choć nie ma jej w podstawie programowej i, jak widzieliśmy, rozwiązanie zadania nie wymaga jej znajomości. Rozumowanie przebiega tak.

Lewą stronę nierówności zapisujemy w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

Przy założeniu $x>0$, korzystamy z nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

$$\text{jeżeli } a>0,\ b>0,\ c>0, \text{ to } \frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}, \text{ czyli } a+b+c\ge 3\cdot\sqrt[3]{abc}.$$

Podstawiając

$$a=x^2,\quad b=\frac{8}{x},\quad c=\frac{8}{x},$$

otrzymujemy

$$x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\ge 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=3\cdot\sqrt[3]{64}=12.$$

Stąd wynika, że $x^2+\frac{16}{x}\ge 12$, co kończy dowód.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie lewej strony nierówności w postaci $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}$.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt

Zastosowanie nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej:

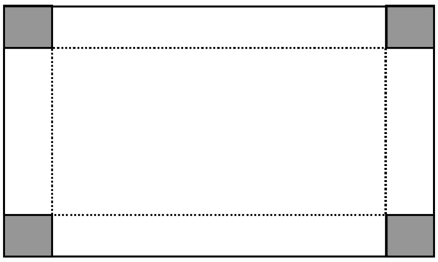
jeżeli $a>0$, $b>0$, $c>0$, to $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$, dla $a=x^2$, $b=\frac{8}{x}$, $c=\frac{8}{x}$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zapisanie, że dla $x>0$, po zastosowaniu nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej otrzymujemy $x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\ge 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=12$, co kończy dowód.

Zadanie IV (0–7)

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę objętość.



Rozwiązanie

Oznaczmy literą x długość boku kwadratowych naroży. Podstawa pudełka ma wymiary

$$(80-2x)\times(50-2x).$$

Wysokość pudełka jest równa x. Zatem objętość wyraża się wzorem

$$V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x,$$

czyli

$$V=(4000-160x-100x+4x^2)\cdot x=4x^3-260x^2+4000x=4\left(x^3-65x^2+1000x\right)$$

dla $0<x<25$.

Rozważmy funkcję $f\left(x\right)=x^3-65x^2+1000x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Obliczamy pochodną tej funkcji: $f'\left(x\right)=3x^2-130x+1000$.

Następnie znajdujemy miejsca zerowe tej pochodnej:

$$\Delta=130^2-12\cdot1000=16900-12000=4900,$$

$$x_1=\frac{130-70}{6}=10,\quad x_2=\frac{130+70}{6}=33\frac{1}{3}.$$

Ponadto:

$f'(x)>0$ w każdym z przedziałów $\left(-\infty,10\right)$ oraz $\left(\frac{100}{3},+\infty\right)$,

$f'(x)<0$ w przedziale $\left(10,\frac{100}{3}\right)$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty,10\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{100}{3},\infty\right)$ i malejąca w przedziale $\left\langle10,\frac{100}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $V(x)=4f(x)$ dla $x\in(0,25)$, więc w przedziale $(0,25)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=10$ funkcja V przyjmuje wartość największą. Szukana objętość jest zatem równa $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18000\ \text{cm}^2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wybór zmiennej i wyrażenie za pomocą tej zmiennej wielkości, które będą potrzebne do zdefiniowania funkcji. Oznaczenie literą x długości boku kwadratowych naroży, zapisanie wymiarów podstawy pudełka $(80-2x)\times(50-2x)$,
- zdefiniowanie funkcji jednej zmiennej, zapisanie objętości jako funkcji zmiennej wysokości pudełka x: $V=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x$,
- określenie dziedziny funkcji V: $0<x<25$.

Zdający otrzymuje **2 punkty** za poprawne zdefiniowanie funkcji zmiennej x opisującej objętość prostopadłościanu. Ponadto zdający otrzymuje **1 punkt** za poprawne określenie dziedziny wynikającej z treści zadania, a nie z wyznaczonego wzoru funkcji.

b) Drugi etap **(3 pkt)** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=3x^2-130x+1000$,
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1=10$, $x_2=33\frac{1}{3}$,
- uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja posiada wartość największą w punkcie $x=10$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt,** o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap **(1 pkt)**.

Obliczenie największej objętości: $V=(80-20)\cdot(50-20)\cdot 10=18\,000\ \text{cm}^2$.

Komentarz

Zdający rozwiązując zadanie może nie doprowadzić rozumowania do końca lub popełnić różnego rodzaju błędy np.:

1. Błędne określenie dziedziny funkcji V np. zapisanie $x>0$ lub $x<50$. Jeżeli zdający nie poda dziedziny funkcji lub poda ją błędnie, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **6 punktów**.
2. Błędne zapisanie wzoru na objętość pudełka (np. niewłaściwe określenie wymiarów pudełka lub wzoru na objętość prostopadłościanu).
3. Niewłaściwe wyznaczenie pochodnej rozważanej funkcji.
4. Nieprawidłowo obliczone miejsca zerowe pochodnej.

5. Błędne określenie monotoniczności funkcji oraz jej ekstremów.
6. Brak uzasadnienia, błędne lub niepełne uzasadnienie, że funkcja V w punkcie $x = 10$ przyjmuje maksimum lokalne.
7. Nieobliczenie lub błędne obliczenie największej objętości pudełka.

Schemat oceniania pokazuje jak w poszczególnych sytuacjach ocenić rozwiązanie zadania.